

Math. p.

153 page
10113.

Math. P.
153 pgd

Franke



GEODÄTISCHE
PUNKTKOORDINIRUNG
IN
SPHÄRISCHEN KLEINSYSTEMEN.

VERGLEICHENDE ENTWICKELUNGEN
IM EINHEITLICHEN KOORDINATENSYSTEM DER BAYERISCHEN
LANDESVERMESSUNG

VON

DR. J. H. FRANKE

K. BAYERISCHEM STEUER-RAT IN MÜNCHEN.

MÜNCHEN
THEODOR ACKERMANN
KÖNIGLICHER HOF-BUCHHÄNDLER
1898.



Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

VORWORT.

In der Landesaufnahme wird die technisch zweckmässige Koordinatenausdehnung zuletzt von der Messungsmethode beeinflusst. Eine graphische Aufnahme kann (sphärische) Grosskoordinaten benützen, während dieselben im Vollzuge der heutigen Zahlenmethode zu technischer Erschwerung und Unsicherheit führen. Das wird zur Evidenz erwiesen, wenn man die zwischen beiden Methoden sowohl in Messung als auch Kartirung bestehenden prinzipiellen Unterschiede kritisch beleuchtet. Hierzu muss freilich ein Standpunkt eingenommen werden, der neben der Praxis auch die theoretischen Grundlagen ausreichend berücksichtigt, um Licht und Schatten gerecht verteilen zu können. Es führt das Ergebniss zu dem Grundsatz, der Koordinirung in der Zahlenmethode nur jene Ausdehnung zu geben, welche die Gleichsetzung der geodätischen Dimensionen und Winkel mit ihrer ebenen Projektion als technisch zulässig erscheinen lässt.

Die Schrift legt den Weg dar, dieser Forderung in einer bereits bestehenden und dabei in ihren Grundzügen beizubehaltenden einheitlich-sphärischen Landeskoordinirung nachzukommen, welcher Fall z. B. in Bayern gegeben ist. Die nothwendige Beibehaltung jener Grundlagen und eines grossen Theiles der älteren Aufnahme erschwert hier die sonst einfache Lösung der Aufgabe, weil gleichzeitig mit grösstmöglicher Brauchbarkeit für neuere und ältere Vermessungs-

zwecke ein Mindestmass von Uebergangsarbeit verlangt wird. Näheres hierüber geben die Einleitung und die Nr. 28: Landesaufnahme in Bayern.

Die Theorie der Soldnerschen Koordinaten wird als bekannt vorausgesetzt. Neben den transformirten Koordinaten dieser Projektion sind auch die rechtwinklig konformen Kleinkoordinaten kurz behandelt. Diesen letzteren Ausführungen liegen die bekannten Arbeiten der Herren Helmert und Jordan zu Grunde. Da jedoch die wahren den ebenen Dimensionen hier gleichgesetzt werden konnten, ist alles auf direkte Anwendungsform dieser Koordinaten berechnet, dabei in Nr. 18 versucht worden, auf einfach algebraischem Wege auch eine kurze begriffliche Ableitung zu geben. Der Aufwand an technischer Mathematik ist auf das Nothwendigste beschränkt und Manches hierin sogar nur angedeutet. Näheres musste eigenem besonderen Interesse überlassen bleiben.

Man wird die Formeln (y) S. 24 und 58 hoffentlich nicht missverstehen; dieselben beziehen sich nicht auf die ebene Projektion, sondern sind als direkte Rechnung mit sphärischen Seiten in Soldnerscher Form für einzelne Punkteinschaltungen gedacht.

Der Abschnitt I ist unter dem Titel: „Koordinaten-Transformationen in geodätischen Dreiecknetzen“ als besonderer Aufsatz in den Denkschriften der mathematisch - physikalischen Klasse der k. bayer. Akademie der Wissenschaften bereits veröffentlicht. (Bd. XXVIII 1898 Heft I S. 19—36).

Die Beigabe der Uebersichtskarte der (versuchsweise eingeführten) sphärischen Kleinkoordinatensysteme des bayerischen Netzes wurde durch das geneigte Entgegenkommen des k. bayer. Katasterbureau (Zentral-Vermessungs- und Katasterstelle in Bayern) ermöglicht, dem ich dafür zu besonderem, auch hier ausgesprochenem Danke verpflichtet bin.

München, im Frühjahre 1898.

J. H. Franke.

Inhalts - Verzeichniss.

	Seite
Einleitung	1— 6
I. Einheitliche und lokale Linearkoordinaten	7—24
A. Allgemeine rechtwinklig-sphärische Koordinaten	8
B. Lokale rechtwinklig-sphärische Koordinaten	12
C. Lokale rechtwinklig-konforme Koordinaten	18
D. Näherungsformeln für direkte Rechnung auf der Kugel	23
II. Hauptbeziehungen im einheitlichen Koordinaten-System	25—33
1. Graphische Landesaufnahme	25
2. Zahlenmethode	27
3. Punkt-Ordnungen	27
4. Verzerrungsgrössen	28
5. Triangulirung	29
6. Polygonisirung	30
7. Koordinatenauftrag	30
8. Liniennetz	32
9. Flächenberechnung	33
III. Lokale Systeme rechtwinklig-sphärischer Koordinaten	34—47
10. Projektionsverzerrungen I.	34
11. Bedingungen für die Kleinsysteme	38
12. Anordnung der Kleinsysteme	39
13. Hilfstafeln für die Transformationen	40
14. Umformungsbeispiel I.	42
15. Umformungsbeispiel II.	44
16. Blattseitenlängen	45
17. Ueberführung der Blattecken-Koordinaten	46
IV. Lokale Systeme rechtwinklig-konformer Koordinaten	48—55
18. Projektionsverzerrung II.	48
19. Umformungsbeispiel III.	50
20. Umformungsbeispiel IV.	53
21. Blattseitenlängen	54
22. Ueberführung der Blattecken-Koordinaten	55

	Seite
Erweiterungen und Zusätze	56—80
23. Achsenkonvergenz	56
24. Sphärische Koordinatenformeln	57
25. Darstellung der linearen Verzerrungen	61
26. Vergleichung der Projektionen	65
27. Transformations-Vollzug	68
28. Landesaufnahme in Bayern	70
Auszug der Transformations-Tabelle	78
Logarithmische Konstanten im bayer. Dreiecknetze	80

Verbesserungen.

S. 42 Z. 4 v. u. statt 05" lies 02'1.

„ 43 „ 3 v. o. „ 0 „ 0.

„ 57 „ 3 v. o. „ 0⁰ „ 0₀.

„ 64 „ 3 v. u. „ (32) „ (32a) der folgenden Seite.

„ 65 Anmerkung lies Z. 3 v. u.

Bemerkung zu D. S. 23. Ein Punkt (ξ, η) in der ebenen konformen Projektion ist auf der Kugelfläche in sphärischen Koordinaten definiert durch

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi \\ \sigma &= \eta - \frac{\eta^3}{6R^2}. \end{aligned}$$

EINLEITUNG.

Die Punkte der geodätischen Dreiecknetze höherer Ordnung sind stets einheitlich zu koordiniren. Die Art der Koordinaten kann nach Umfang und Zweck der Vermessung eine verschiedene sein. In letzter Linie, d. h. für die abnehmenden Netzordnungen, erweisen sich jedoch nur rechtwinklige Linearkoordinaten als technisch zweckmässig. Da in diesen letzteren Ordnungen die Punktzahl in beschleunigter Progression wächst, so gelangt man bald zu einer Grenze, von der an es zur praktischen Bedingung wird, die geodätischen Koordinaten unmittelbar als rechtwinklig-ebene betrachten zu dürfen. Bei einer solchen unmittelbaren Uebertragung in die Ebene erleiden jene Koordinaten unvermeidliche Verzerrungen, deren Art und Grösse von der gewählten Projektionsart und dem Abstände der Punkte von der Vermessungsachse abhängig ist. Hierbei nimmt die Grösse jener Verzerrungen im beschleunigten Verhältnisse dieser Abstände zu.

Die Forderung, geodätische Koordinaten unmittelbar als ebene betrachten zu dürfen, war von geringem Belange bei Landesaufnahmen nach der graphischen Methode, da hier trigonometrische Netzordnungen unterhalb der II., höchstens III., nicht vorhanden waren. Für die grundlegenden Punkte höherer Ordnung sind aber geodätische Koordinaten unbedingt erforderlich, während gleichzeitig deren theoretisch richtige Ableitung und Benützung einschliesslich ihrer Abbildung in der Ebene anbetrachts der geringen Punktzahl zwar störende, jedoch nicht

unübersteigliche Hemmnisse bietet. So sehen wir die erste systematische Landesvermessung Deutschlands, die von Soldner in Bayern, gegründet auf ein das ganze Landesgebiet umfassendes Punktnetz mit einheitlichen, rechtwinklig-sphärischen Koordinaten, die bis zur Einzelvermessung herab ihre Geltung behielten. Wenn nun in einem derartig abgeschlossenen und einheitlichen Vermessungswerke sowohl eine allgemeine Verdichtung des älteren trigonometrischen Punktnetzes als auch an verschiedenen Orten umfangreiche Neuaufnahmen auszuführen sind und hierbei gleichzeitig von der graphischen zur Zahlen-Messungsmethode übergegangen wird, so verursacht bei der bedeutenden Mehrung der Koordinatenpunkte der stete oder doch überwiegende Gebrauch sphärischer Linearkoordinaten erhebliche und technisch nachteilige Hemmungen. Diese werden in ihrem belangreichsten Teile behoben durch Einführung derartig eingeschränkter Systeme, dass in den trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten die sphärischen Koordinatenergänzungen praktisch gleich Null gesetzt und ebenso bei der Kartirung die geodätischen Koordinaten unmittelbar als ebene betrachtet werden können. Das würde also zur Anlage lokaler Koordinatensysteme nötigen, für die indes im vorliegenden Falle gewisse unerlässliche Bedingungen bestehen. Aus organisatorischen Gründen müssen solche lokale Systeme dauernden Bestand und dabei die technisch noch zulässige grösstmögliche Ausdehnung haben. Da ferner die in Koordinaten des einheitlichen Systems gegebenen älteren trigonometrischen Punkte als Ausgangspunkte der Neutriangulirung in die neuen Systeme zu übernehmen sind, so hat die möglichste Oekonomie in den veranlassten Ueberführungsarbeiten Platz zu greifen. Schliesslich besteht die Bedingung, dass die Neubestimmten Punkte gegebenenfalls mittels der neuen Koordinaten auch in den älteren Landesvermessungsblättern der einheitlichen Koordinirung unmittelbar eingetragen werden können, d. h. ohne hierzu einer vorherigen Zurücktransformirung zu bedürfen. Diese Bedingungen berühren die mathematische Lösung der Frage in hohem Grade und haben zunächst zur wesentlichsten Folge, den Kon-

vergenzwinkel zwischen den ursprünglichen und den neuen Achsenrichtungen auf das technisch noch mögliche Minimum bringen zu müssen.

Dem Ausgangspunkte der Betrachtung entsprechend, d. h. in ein einheitliches System Soldnerscher Koordinierung lokale Systeme einzuführen, wird man auch die neuen Koordinaten als Soldnersche definieren. Diese Projektionsart, neuerer Zeit als kongruente bezeichnet, bildet bekanntlich die geodätische Ordinate o ohne Längenänderung in der Ebene ab, während hierbei die geodätische Abszisse a eine Vergrößerung $\frac{a \cdot f(o)}{R^2}$ erfährt. Diese ungleichmässige Verzerrung der Längen verursacht gleicherweise, dass auch die geodätischen Richtungen φ , bzw. Winkel $(\varphi' - \varphi)$ bei ihrer Reduktion auf die Ebene einer ungleichmässigen, zwischen weiten Grenzen schwankenden Verzerrung unterliegen. Da dieser letztere Umstand die Zulässigkeit einer ebenen Triangulierungs-, bzw. Koordinatenberechnung auf geringe Abstände o von der Vermessungsachse einschränkt, so kann zur Verringerung dieser Hemmung, d. h. zur Hinausschiebung jener zulässigen Abstände o , zunächst daran gedacht werden, die ungleichmässige ebene Abbildung der beiden Koordinaten zu heben. Es könnte dies einfach geschehen, wenn man wie bei der Abszisse auch jedem Linien-elemente der Ordinate eine Vergrößerung $\frac{f(o)}{R^2} do$ zukommen lässt. Die Funktion $f(o)$ kann bekanntlich für Abstände $o < 200$ km von der Vermessungsachse bei rein sphärischer Rechnung, d. h. wenn der ellipsoidischen Vermessungsfläche eine berührende Kugel substituiert wurde, gleich $\frac{o^2}{2}$ gesetzt werden. Die Integration gibt hierfür

$$\int \frac{o^2}{2 R^2} do = \frac{o^3}{6 R^2},$$

wonach sich die neue Ordinate η zu $o + \frac{o^3}{6 R^2}$ bestimmt. Diese

Koordinaten ξ, η der ebenen Projektion stehen demnach mit denen der Soldnerschen Projektion a, o in der Verbindung

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a \\ \eta &= o \left(1 + \frac{o^2}{6 R^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (X)$$

Das ist vorläufig nicht als Beweis, sondern nur als Andeutung einer ersten Idee aufzufassen.

Wie bekannt, und hier später elementar nachgewiesen wird, geben diese ξ, η in letzter Linie eine konforme Projektion, d. h. eine solche, in welcher Urbild und Abbild in den kleinsten Teilen einander ähnlich sind. Dieser kurzen Uebersicht lässt sich indes schon jetzt entnehmen, dass gegenüber der Soldnerschen Projektion hier die Linearverzerrungen im allgemeinen Mittel zwar grösser werden, doch innerhalb des Soldnerschen Maximums sich halten, während wieder die differentiell gleichmässige lineare Verzerrung diejenige der Richtungen, bzw. Winkel verringern muss. Wollte man daher aus diesen Gründen in einem vorliegenden sphärischen Netze, also einem solchen mit konstanter Krümmung $\frac{1}{R}$, die Soldnerschen

Koordinaten in rechtwinklig-konforme umwandeln, so gewähren die Gl. (X) hierfür ein einfaches Mittel. Dabei ist indes folgendes zu beachten. Bei einem gewissen, numerisch noch zu bestimmenden Abstände η macht die zunehmende Grösse der Verzerrungen die Gleichsetzung der geodätischen mit den ebenen Dimensionen technisch unzulässig und schliesst somit die direkte Rechnung und Abbildung in der Ebene aus. Ueber jene Grenze η hinaus müssten also wieder bei unmittelbarer Rechnung auf der Kugel sphärische Ergänzungen Platz greifen oder für eine Rechnung in der Ebene vorherige Reduktionen von der Kugel auf die Ebene und umgekehrt stattfinden. Beides soll aber vom Netze III. Ordnung abwärts an ausgeschlossen erscheinen, wenn auch hier gegenüber der kongruenten Projektion in gewisser Hinsicht Vereinfachungen und Erleichterungen bestehen. Ein zweiter Weg ergibt sich durch Anord-

nung solcher lokalen Systeme, deren maximales η noch die unmittelbare Gleichsetzung der geodätischen Dimensionen mit den ebenen gestattet. Dieser Vorgang ist offenbar der den technischen Interessen einer Landesvermessung entsprechendste und würde bei Neuanlage einer ausgedehnten Landesvermessung gegebenenfalls auch wohl überall eingeschlagen werden, indem man nur die Punkte der I. und II. Netzordnung allgemein koordinirt, vom Netze III. Ordnung abwärts an alles in den lokalen Systemen mit neuen Meridionalachsen macht. Wenn indessen in einer bereits abgeschlossenen Landesvermessung erst nachträglich solche Systeme einzuführen sind, so hat sich bereits oben gezeigt, dass deren Anordnung und Ausdehnung hier gewissen Nebenbedingungen unterliegt. Insbesondere erscheint durch die notwendige Beachtung dieser Bedingungen ausgeschlossen, den lokalen Vermessungsachsen die Meridianrichtung zu geben, was bei der Neuanlage der ganzen Landesvermessung ja sonst — von besonderen territorialen Ausdehnungsverhältnissen abgesehen — selbstverständlich wäre. Dies beachtet, unterliegt es sodann aber keiner Schwierigkeit, bei der Transformation der allgemeinen Koordinaten α, o in lokale x, y die letzteren zugleich in solche der ebenen Projektion ξ, η überzuführen. Wie sich später zeigen wird, gestattete dieses eine Verringerung der sonst benötigten lokalen Systeme, da in diesen das maximale η erheblich grösser als das maximale y angesetzt werden darf, indem dabei die Triangulirung noch mit grosser Schärfe zu machen ist.

Ob man gelegentlich dieser Transformationen bei Soldner'schen Koordinaten x, y stehen bleiben oder dabei zu solchen der ebenen Projektion ξ, η übergehen will, kann von besonderen Erwägungen und Verhältnissen abhängen. Jedenfalls ist sicher, dass trotz der erforderlichen Ueberführungsarbeiten hinsichtlich der gegebenen (älteren) Punkte und trotz der Gleichsetzung der geodätischen mit den ebenen Dimensionen innerhalb bestimmter Grenzen der ökonomische und technische Vorteil auf Seite der transformirten Koordinaten ist, sobald nur durch besondere Definition der neuen Koordinatenachsen, wie

hier geschehen soll, eine tabellarische Umformung mittels bloß einem Gliede ermöglicht wird. Der ökonomische Vorteil ist ohne Weiteres klar, wenn man die unbequemen Ergänzungsglieder der rechtwinklig-sphärischen Koordinaten betrachtet, während der Wegfall einer Berücksichtigung geometrischer Minimalgrößen bei der Kartirung (wenn die σ eine gewisse Grenze übersteigen) sich als technischer Vorzug erweist. Zum mindesten wird die mit den transformirten Koordinaten gegebene Möglichkeit, alle Arbeiten vorbehaltlich bestimmter (unschädlicher) Vernachlässigungsgrenzen in der Ebene vollziehen zu können, die Sicherheit sämtlicher Arbeitsergebnisse erheblich fördern.

I. Einheitliche und lokale Linearkoordinaten.

Die an den Namen des Geodäten und Astronomen Soldner geknüpfte bayerische Landesvermessung war in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts ein vorbildliches Muster und ist es in manchen Beziehungen lange geblieben. Die Einführung rechtwinklig-sphärischer Koordinaten, heute Soldner'sche Koordinaten genannt, bildete einen bedeutsamen wissenschaftlichen Fortschritt, während gleichzeitig die an die Koordinaten geknüpfte Systematik der Landesvermessungsblätter für die geodätische Technik von höchster Bedeutung war.

In der That ist die Soldner'sche Projektion, zu den Cylinderprojektionen gehörig, in vorzüglicher Weise zur bildlichen Darstellung eines Landes geeignet, welches links und rechts von der Vermessungsachse nur eine Ausdehnung von etwa 200 km, also eine Breite von 400 km hat. Sie lässt in dieser Ausdehnung die sphärische anstatt der sphäroidischen Rechnung noch als zulässig erscheinen und hat dabei den Vortheil der geringsten linearen und Flächen-Verzerrung, wenn für mässige Entfernungen von der Vermessungsachse die sphärischen Koordinaten als eben und rechtwinklig, bzw. kongruent angesehen werden. Hier bringen sie dann die wirklichen Längen und Flächen mit der möglichst kleinsten Linear- und Flächenverzerrung zur Darstellung.

Die bayerische Landesvermessung und auch die anderer Länder ist einheitlich, d. h. auf einen Nullpunkt und eine Vermessungsachse koordinirt. Dies bedingt wegen der Quer-

ausdehnung des Landes bis zu Ordinaten ± 180 km die stete Beibehaltung sphärischer Koordinaten, die auch in der Durchführung grundsätzlich erfolgt ist. So zulässig dies auch für die ältere Vermessung erscheint, da diese eine graphische war und mit dem Messtische erfolgte, so vielfach erschwerende Nachteile hat jene Beibehaltung für die Praxis der modernen Landesvermessung. Diese ist nämlich von der graphischen Aufnahme allgemein zur Zahlenmethode, d. h. zur Theodolitwinkelmessung und zur direkten Längenmessung übergegangen und demnach zur ausgesprochenen trigonometrischen Methode geworden. Die so geänderte Technik in Verbindung mit den gesteigerten Genauigkeitsanforderungen, die sich im Verflusse nahezu eines Jahrhunderts in der Vermessung vollzogen haben, macht eine Weiterbildung des Bestehenden zur gebieterischen Notwendigkeit. Eine gänzliche Umbildung, wie sie in der Einführung der strengen konformen Abbildung (nach Gauss) liegen würde, kann wegen ihres tieferen Eingreifens erst in zweiter Linie in Betracht kommen. Es handelt sich demnach zunächst darum, unter Beibehaltung der Soldner'schen Projektion und der systematischen Vorzüge von dessen einheitlicher Koordinirung zu Koordinatensystemen zu gelangen, welche ihre Brauchbarkeit für die ältere Landesvermessung behalten und doch gleichzeitig den Anforderungen der heutigen trigonometrischen Messungsmethode angepasst sind. Weiter ist dann der etwaige Uebergang zu konformen Koordinaten zu erörtern.

Es dürfte den nachstehenden Entwicklungen zu statten kommen, wenn hier die Grundlagen und Formeln der Soldner'schen Koordinaten kurz vorangestellt werden.

A. Ein durch den Normalpunkt gelegter Vertikalschnitt (gewöhnlich, nicht notwendig, der Meridian jenes Punktes) bildet die Vermessungs- oder Abscissenachse, der auf dieser im Nullpunkte senkrecht stehende Grosskreis die Haupt- oder Direktionsachse (Ordinatenachse). Die Ordinate (o) eines Punktes ist das von demselben auf die Vermessungsachse gefällte Perpendikel; Abscisse (a) des Punktes ist das von dem Fusspunkte

des Perpendikels und vom Normalpunkte aus gezählte Stück der Vermessungsachse. Die orientirenden Richtungen (Direktionswinkel) der Vertikalschnitte zählen von der Ordinatenrichtung aus im rechtsläufigen Sinne. Die Messblatteintheilung steht mit dem sphärischen Koordinatensystem in genauester Verbindung.

Ist l die normale Länge des (quadratischen) Blattes und M die Massstabsgrösse, so ist die (verjüngte) Blattseite $l M$. Die Vermessungsachse sei nördlich und südlich vom Nullpunkte in gleiche Abstände $l M$ (Schichten N) geteilt; auf den von diesen Punkten ausgehenden Ordinatenkreisen seien von der Vermessungsachse aus die gleichen Abstände $l M$ (Reihen oder Nummern n) aufgetragen. Hierdurch entsteht ein Netz kleiner, nach Ost und West wegen der Konvergenz der Ordinatenkreise sich stetig in der Höhe verringender Vierecke, welche die Messblätter bilden.

Mit den Hilfsausdrücken

$$m = s \sin \varphi; \quad n = s \cos \varphi; \quad \omega = \frac{1}{\sin 1''}$$

sind die Soldner'schen Linearkoordinaten a und o gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= a_1 + m + \frac{m}{2R^2} \left(o_1^2 - \frac{n^2}{3} \right) \\ o_2 &= o_1 + n - \frac{m^2}{2R^2} \left(o_1 + \frac{n}{3} \right) \\ \varphi_2 &= 180 + \varphi_1 + \frac{\omega \cdot m}{R^2} \left(o_1 + \frac{n}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

in welchen die dritten Glieder die sphärischen Ergänzungen

$$(\delta a), \quad (\delta o), \quad (\delta \varphi)$$

darstellen. Für die Polarkoordinaten bestehen mit $(a_2 - a_1) = \Delta a$ und $(o_2 - o_1) = \Delta o$ die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\Delta a - \frac{\Delta a}{2 R^2} \left(o_2^2 - \frac{(\Delta o)^2}{3} \right)}{\Delta o + \frac{(\Delta a)^2}{2 R^2} \left(o_1 + \frac{\Delta o}{3} \right)} \\ s &= \frac{\Delta a - \frac{\Delta a}{2 R^2} \left(o_2^2 - \frac{(\Delta o)^2}{3} \right)}{\sin \varphi} = \frac{\Delta o + \frac{(\Delta a)^2}{2 R^2} \left(o_1 + \frac{\Delta o}{3} \right)}{\cos \varphi} \end{aligned} \right\} (2)$$

als erste Näherung (wegen Gleichsetzung von m und n mit Δa , bzw. Δo), die indess für alle gewöhnlichen Landesvermessungszwecke ausreicht.

Für die Blatthöhenverkürzung v_h kann die Richtung und Länge l der Blattseite nordsüdlicher Richtung mit dem unter dem Direktionswinkel 90° durch eine Blattecke gelegten Vertikalschnitt identificirt werden. Man hat dann aus der ersten der Gl. (1), mit o die Mittelordinate des Blattes bezeichnend,

$$v_h = \frac{l \cdot o^2}{2 R^2} \quad (3)$$

in natürlichem Masse. Hieraus folgt, da die Blattseiten westöstlicher Richtung definitionsgemäss unverkürzt bleiben, die Flächenverkürzung eines (quadratischen) Blattes

$$v_f = \frac{l^2 \cdot o^2}{2 R^2} \quad (4)$$

Entsprechend der bildlichen Darstellung in der Ebene sind auch die Abscissen der Koordinatenpunkte verkürzt aufzutragen.

Bezeichnet a_n die Abscisse des der Direktionsachse zunächst liegenden Blattrandes, so ist der Abscissenrest $(a - a_n)$ ähnlich Gl. (3) um

$$v_a = \frac{(a - a_n) o^2}{2 R^2} \quad (5)$$

zu verkürzen.

Die trigonometrischen Arbeiten sind nach den Gl. (1) und (2) in der Regel durchaus sphärisch geführt worden, in den Planarbeiten der graphischen Aufnahme sind gleichfalls die sphärischen Beziehungen (3) und (5) zur Beachtung gelangt,

während lediglich das v_f der Gl. (4) unbeachtet blieb. Die moderne Landesvermessung hat es mit durchaus anderen Verhältnissen zu thun. Anstatt der früheren 2 bis 3 Koordinatenpunkt-Ordnungen bestehen jetzt 7 bis 8 (5 trigonometrische, 2 polygonometrische und gegebenenfalls 1 geometrische); zugleich ist die Zahl der Koordinatenpunkte um das mehrhundertfache gewachsen. Die Gl. (1) sind in den Punktordnungen I—III, dann IV und V mindestens von $o = 0$ bis 20, bzw. 40 km, in den Ordnungen VI und VII von 60, bzw. 90 km an (hier beschränkt auf das erste Glied der Abscissen-Ergänzung) zu beachten. Das Gleiche gilt von $o = 90$ km an für die Gl. (3) und (5), während Gl. (4) durchaus zur Anwendung gelangt. Alle diese technischen Massnahmen sind bedingt durch die gesteigerten Genauigkeitsanforderungen in Verbindung mit der heutigen Plandarstellung in grösserem Massstabe. Die wesentlichste Anforderung besteht nun darin, alle diese sphärischen Beziehungen Gl. (1)–(5) unmittelbar in die Koordinaten aufzunehmen, d. h. diese als eben betrachten zu dürfen, und so durch Vereinfachung und Fehlerquellenverschliessung, insbesondere auch der zahlenmässigen Behandlung geometrischer Minimalgrössen, den technischen Wert und die Genauigkeit der modernen Vermessung zu steigern. Die mathematische Erfüllung jener Anforderung ist an und für sich leicht, kann jedoch durch eine wesentliche Bedingung erschwert werden, die darin besteht, dass die neuen Koordinaten mit geometrisch hinreichender Genauigkeit in den allgemeinen Landesvermessungsblättern der einheitlichen Koordinirung unmittelbar verwendet werden können. (Dieser Fall ist, wie in Bayern, dann vorhanden, wenn keine vollständige Neuvermessung des ganzen Landesgebiets vorliegt.) Offenbar kann diese Bedingung nicht lediglich durch Verkleinerung der neuen Systeme, sondern nur durch eine derartige Lage der neuen Koordinatenachsen erreicht werden, dass der Abweichungswinkel gegen die ursprünglichen Achsen der minimalste wird. Hiermit ist zugleich ausgesprochen, dass die Meridiane der neuen Normalpunkte, wenn der Meridian des Nullpunktes der einheitlichen Koordinirung

Vermessungsachse war, nicht als neue Achsen dienen können, da in unseren Breiten bei 100 km Querabstand die Meridiankonvergenz $> 1^\circ$ ist.

B. Dementsprechend wird definirt: Die Haupt- oder Richtungsachse des lokalen Systems bildet der bisherige Ordinatenschnitt des neuen Nullpunktes N' im ursprünglichen System U , die neue Vermessungs- oder Abscissenachse der hiezu senkrechte Vertikalschnitt in N' . Abscissen und Ordinaten im neuen System sind ähnlich wie im ursprünglichen System, also als Abschnitte, bzw. Perpendikel der neuen Vermessungsachse definirt. Das System ist demnach wieder ein sphärisches nach Soldner. Es sind die allgemeinen Koordinaten (a, o) eines Punktes A in solche (x, y) des neuen Systems mit dem Nullpunkte N' , (a_0, o_0) zu transformiren.

Es bestehen die Grundgleichungen im System U

$$\left. \begin{aligned} a - a_0 &= \Delta a = s \sin \varphi + (\delta a) \\ o - o_0 &= \Delta o = s \cos \varphi + (\delta o) \end{aligned} \right\} \quad (U)$$

und im System N

$$\left. \begin{aligned} x &= s \sin \varphi + (\delta x) \\ y &= s \cos \varphi + (\delta y) \end{aligned} \right\} \quad (N)$$

wo s der Vertikalschnitt $N' A$.

Durch Einführung von (U) in (N) folgt

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta a + (\delta x) - (\delta a) \\ y &= \Delta o + (\delta y) - (\delta o) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

und da nach Gl. (1)

$$(\delta a) = \frac{m}{2R^2} \left(o^2 - \frac{n^2}{3} \right); \quad (\delta o) = -\frac{m^2}{2R^2} \left(o_0 + \frac{n}{3} \right)$$

$$(\delta x) = \frac{m}{2R^2} \left(y^2 - \frac{n^2}{3} \right); \quad (\delta y) = -\frac{m^2}{2R^2} \cdot \frac{n}{3}$$

ist (letzteres unter Beachtung, dass die Koordinaten des neuen Nullpunktes gleich Null sind), so erhält man

$$(\delta x) - (\delta a) = -\frac{m}{2R^2}(o^2 - y^2)$$

$$(\delta y) - (\delta o) = \frac{m^2}{2R^2} o_0$$

woraus durch Einsetzung in Gl. (a)

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta a - \frac{m}{2R^2}(o + y)(o - y) \\ y &= \Delta o + \frac{m^2}{2R^2} o_0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Mit für weite Grenzen hinreichender Sicherheit gelten die Vereinfachungen $m = \Delta a$, $n = \Delta o$ und $y = (o - o_0)$, daher

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta a - \frac{\Delta a}{R^2} \left(o - \frac{o_0}{2} \right) o_0 = \Delta a + \delta \\ y &= \Delta o + \frac{(\Delta a)^2}{2R^2} o_0 = \Delta o + \delta' \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Dies sind die für vereinfachte tabellarische Behandlung eingerichteten Transformationsformeln. Man leitet aus ihnen die Umkehrungen ab

$$\left. \begin{aligned} a &= (a_0 + x) + \frac{x}{R^2} \left(\frac{o_0}{2} + y \right) o_0 = (a_0 + x) + \delta_1 \\ o &= (o_0 + y) - \frac{x^2}{2R^2} \cdot o_0 = (o_0 + y) + \delta_1' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

die, weil in ihnen $x = \Delta a$ und $y = \Delta o$ gesetzt sind, als erste Näherung gelten. (Die Transformationen (6) sind von mir gelegentlich einer anderen Arbeit bereits 1890 in Nr. 3022 der A. N. abgeleitet worden.)

Es ist noch die Frage der geringsten Achsenkonvergenz¹⁾ zu erledigen, die hier lediglich hinsichtlich der Konvergenz der neuen Achsen mit den Messblattseiten der einheitlichen Koordi-

¹⁾ Diese Konvergenz erhält man auch ganz kurz durch die dritten der Gl. (1) und (15), nämlich $c'' = -\frac{\omega \cdot m o_0}{R^2} = -\frac{\omega \cdot \Delta a \cdot o_0}{R^2}$, wie nachher Gl. (9).

nirung in Betracht kommt. In dieser letzteren Beziehung ist sie ausführlicher zu betrachten.

Die Koordinaten eines quadratförmigen Soldner'schen Blattes im einheitlichen System, hier der Kürze halber a und o positiv genommen, lassen sich ausdrücken durch

Ecken.	<u>SO.</u>	<u>SW.</u>	<u>NW.</u>	<u>NO.</u>
	a	a	$a + l \cdot M$	$a + l \cdot M$
	o	$o + l \cdot M$	$o + l \cdot M$	o .

Im lokalen Systeme vermöge (7) durch

$$\left. \begin{array}{ll}
 \delta : & \begin{array}{l} \text{SO.} \\ -\frac{\Delta a}{R^2} \left(o - \frac{o_0}{2} \right) o_0 \end{array} & \begin{array}{l} \text{SW.} \\ -\frac{\Delta a}{R^2} \left((o + lM) - \frac{o_0}{2} \right) o_0 \end{array} \\
 \delta' : & \begin{array}{l} \frac{(\Delta a)^2}{2 R^2} o_0 \end{array} & \begin{array}{l} \frac{(\Delta a)^2}{2 R^2} o_0 \end{array} \\
 \delta : & \begin{array}{l} \text{NW.} \\ -\frac{(\Delta a + lM)}{R^2} \left((o + lM) - \frac{o_0}{2} \right) o_0 \end{array} & \begin{array}{l} \text{NO.} \\ -\frac{(\Delta a + lM)}{R^2} \left(o - \frac{o_0}{2} \right) o_0 \end{array} \\
 \delta' : & \begin{array}{l} \frac{(\Delta a + lM)^2}{2 R^2} o_0 \end{array} & \begin{array}{l} \frac{(\Delta a + lM)^2}{2 R^2} o_0 \end{array}
 \end{array} \right\} (b)$$

Die Subtraktion gibt unter Abwerfung der zu vernachlässigenden Glieder $\frac{lM}{R^2}$ und $\frac{(lM)^2}{2R^2}$ sowie Uebergang zu natürlichem Masse durch Division mit der Massstabsgrösse M die lineare Divergenz $c = \delta_{\text{SO.}} - \delta_{\text{SW.}} = \delta_{\text{NO.}} - \delta_{\text{NW.}}$, dann $\delta'_{\text{NO.}} - \delta'_{\text{SO.}} = \delta'_{\text{NW.}} - \delta'_{\text{SW.}}$ der älteren Blattseitenrichtungen mit den neuen Koordinatenachsen für die Blattlänge l

$$c = - \frac{\Delta a \cdot l \cdot o_0}{R^2} \quad (9)$$

Denkt man sich die Mitten der Seiten eines identischen Blattes, einmal mit lokalen, dann mit allgemeinen Koordinaten konstruiert, zur Deckung gebracht, so wird die ganze Konver-

genz zur Hälfte mit $+$ und $-$ auf die 4 Blattecken geworfen, so dass für diese der Ausdruck besteht

$$c_e = \pm \frac{\Delta a \cdot l \cdot o_0}{2 R^2} \quad (10)$$

Der lineare Wert von c_e kann nicht höher als 0,05 mm, die äusserste Anfangsgrenze der geometrischen Darstellbarkeit, angenommen werden; hiernach sind Δa und o_0 durch die Gleichung

$$0,0001 R^2 = l \cdot \Delta a \cdot o_0 \quad (11)$$

verbunden.

In ähnlicher Weise leiten sich die Blattabmessungen ab. Man findet aus den vorhin benützten Gl. (b) erst für die östlichen und westlichen, dann für die südlichen und nördlichen Blattseiten, wieder unter Abwerfung von $\frac{(l \cdot M)^2}{R^2}$, die Näherungsausdrücke

$$\left. \begin{aligned} v_l &= \delta_{NO.} - \delta_{SO.} = \delta_{NW.} - \delta_{SW.} = l \cdot \frac{(2o - o_0)}{2 R^2} o_0 \\ v_l' &= \delta'_{SW.} - \delta'_{SO.} = \delta'_{NW.} - \delta'_{NO.} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Dasselbe Blatt hat in lokalen Koordinaten, die ja gleichfalls sphärische sind, wieder eine Verkürzung der Blattlängen in der Abscissenrichtung, die ähnlich wie (3), wenn wie hinreichend $y = (o - o_0)$ gesetzt wird,

$$v_r = \frac{l \cdot y^2}{2 R^2} = \frac{l \cdot (o - o_0)^2}{2 R^2} \quad (13)$$

beträgt, während definitionsgemäss und wie oben die Blattlängen in der Ordinatenrichtung ungeändert bleiben. Die Addition gibt

$$v_l + v_r = \frac{l}{2 R^2} ((2o - o_0) o_0 + (o - o_0)^2) = \frac{l \cdot o^2}{2 R^2} \quad (14)$$

Das ist also die thatsächliche Blattverkürzung v_h der Gl. (3). (Dass das hier gebrauchte o gegen das dort benützte eigentlich $(o - \frac{l}{2})$, ist für die Differentialformel (14) ohne Belang).

Der Zweck der transformirten Koordinaten x, y besteht darin, sie innerhalb gewisser Ausdehnungsgrenzen als ebene Koordinaten betrachten zu können, demnach von den strengen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + m + \frac{m}{2R^2} \left(y_2^2 - \frac{n^2}{3} \right) \\ y_2 &= y_1 + n - \frac{m^2}{2R^2} \left(y_1 + \frac{n}{3} \right) \\ \varphi_2 &= 180 + \varphi_1 + \frac{\omega m}{R^2} \left(y_1 + \frac{n}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

zu den genäherten

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + m \\ y_2 &= y_1 + n \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

übergehen zu können. Hierfür ist das Maximum der Ordinate y massgebend. Die Genauigkeitsanforderungen können verschiedene sein und bemessen sich nach der Grösse der linearen (v) und der Richtungsverzerrung (v') bei der Abbildung in der Ebene. Diese sind im Soldner'schen Systeme wie bekannt und auch leicht zu finden

$$\left. \begin{aligned} 1+v &= 1 + \frac{(\delta a)\sin\varphi + (\delta o)\cos\varphi}{s} = 1 + \frac{\sin^2\varphi}{6R^2} (o_1^2 + o_1o_2 + o_2^2)^1) \\ v' &= \frac{(\delta a)\cos\varphi - (\delta o)\sin\varphi}{s} \\ &= \frac{a_2 - a_1}{6R^2} (2o_1 + o_2) + \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{6R^2} (o_1^2 + o_1o_2 + o_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Somit hat die lineare Verzerrung ihr Maximum in der Abscissenrichtung, die Richtungsverzerrung im Oktanten.

Die numerische Auswertung gibt hiefür bei $y = \pm 40$ km und bei $s = 7$ km.

$$\text{Max. } l_v = 1 : 50\,000; \text{ Max. } r_v = 3'' \quad (18)$$

Hiernach bestimmen sich die Querausdehnungen lokaler Systeme und damit auch deren Nullpunktsordinate o_0 durch das

¹⁾ Für $o_1 = o_2$ wird $1+v = 1 + \frac{o^2}{2R^2} \sin^2\varphi$.

zulässige Max. von y . Die Ausdehnung in der Abscissenrichtung (x) könnte über 200 km steigen, wenn nicht gegebenenfalls die wichtigen Gleichungen (10), bzw. (11) beständen. Mit $l = 0,5$ m, dann $y = \pm 40$ km wird zunächst erhalten für $o_0 = \pm 80$ km, sodann für $o_0 = \pm 160$ km, nach Gl. (11)

$$\Delta a = 102 \text{ km, bzw. } 51 \text{ km.}$$

Das Ergebniss der vorstehenden Darlegung ist sonach:

Werden die sphärischen Koordinaten der einheitlich koordinirten Dreieckspunkte höherer Ordnung eines Soldner'schen Netzes mittels der Gl. (7) auf neue Koordinatenachsen derart, wie sie Seite 12 definirt sind, transformirt, so erhält man wieder ein System rechtwinklig-sphärischer Koordinaten. Man kann diese transformirten Koordinaten innerhalb gewisser, aus (17) abzuleitender Genauigkeitsgrenzen als ebene betrachten und sodann mit den einfachen Formeln (16) weiter rechnen. Nach den in (18) gegebenen numerischen Auswertungen ist dies vom Dreiecknetz III. Ordnung abwärts an bei $y = \pm 40$ km zulässig mit einer linearen Genauigkeit 1:50 000 und einer maximalen Richtungsverzerrung von 3". Zugleich geben bis zu dieser Grenze $y = \pm 40$ km die ebenen Koordinaten das Landesvermessungsblatt der einheitlichen Koordinirung wieder mit einer Abscissenverzerrung im Maximum von 1:50 000, was gleicherweise für die aufzutragenden Abscissenreste gilt. Vermöge der Gl. (11) und der obigen numerischen Auswertung lassen sich die transformirten Koordinaten als ebene gleich den einheitlich sphärischen Koordinaten innerhalb der Werte $y = \pm 40$ km und $\Delta a = x = \pm 102$, bzw. 51 km bei $o_0 = \pm 80$, bzw. 160 km bis zu einer Maximaldifferenz von 0,05 mm für alle Planarbeiten im einheitlichen Blattsystem der Landesvermessung unmittelbar verwenden.

Hienach sind durch die transformirten (ebenen) Koordinaten die sämtlichen (trigonometrische wie geometrische) sphärischen Beziehungen der Gl. (1)—(5) innerhalb technisch zulässiger Grenzen zahlenmässig in diese Koordinaten aufgenommen.

C. Die bisher behandelte Soldner'sche (kongruente) Projektion ist neuerer Zeit durch eine konforme Abbildung (nach Gauss), in welcher Original und Abbildung in den kleinsten Teilen ähnlich sind, hie und da ersetzt worden. Von Herrn General Schreiber wurde sie in modificirter Form als konforme Doppelprojektion der preussischen Landesaufnahme zu Grunde gelegt, und neuerdings durch Herrn Jordan in der Mecklenburgischen Landesvermessung theoretisch und praktisch weiter entwickelt. Ihr eignen gewisse principielle Vorzüge, besonders auch für die einheitliche Projektion eines sehr grossen Landesgebiets. Indessen hat schon 1876 Herr Helmert darauf hingewiesen, dass die konformen Koordinaten ihren grossen Wert auch in der allgemeinen Landesvermessung haben. Zwar ist ihre absolute Flächenverzerrung nahezu doppelt so gross als die Soldner'sche, dafür jedoch nach allen Richtungen gleichmässig und gleichzeitig werden die Richtungsverzerrungen so gering, dass in weit grösserer Ausdehnung die ebene Triangulierung zulässig erscheint.

Seien ξ, η die rechtwinklig-konformen Koordinaten, so hat man die wichtigen, unseres Wissens zuerst von Herrn Helmert aufgestellten Vergleichen zwischen kongruenten und konformen Koordinaten, die allen hier zu machenden Anwendungen zu Grunde liegen, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a \\ \eta &= o \left(1 + \frac{o^2}{6 R^2} + \frac{o^4}{24 R^4} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

wobei für eine sphärische Rechnung bis zu $o < 200$ km das Glied vierter Ordnung vernachlässigt werden kann. Innerhalb dieser Grenze sind dann die vorigen Verzerrungen (17) nunmehr

$$\left. \begin{aligned} 1 + V &= 1 + \frac{(\delta a) \sin \varphi + (\delta o) \cos \varphi}{s} + \frac{(o_2^3 - o_1^3)}{6 R^2 s} \cos \varphi = 1 + \frac{(o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2)^1)}{6 R^2} \\ \varphi'' - \varphi &= V' = \frac{(\delta a) \cos \varphi - (\delta o) \sin \varphi}{s} - \frac{(o_2^3 - o_1^3)}{6 R^2 s} \sin \varphi = \frac{a_2 - a_1}{6 R^2} (2 o_1 + o_2) \end{aligned} \right\} (20)$$

Deren Vergleichung mit den (17) zeigt die principiell und technisch gleich wertvolle gleichmässige Linearverzerrung bei Gauss, während die Richtungsverzerrung nur aus dem ersten Soldner'schen Gliede besteht. Die erstere ist dem Maximum von Soldner gleich, die zweite dagegen erheblich niedriger. Diese ist für $y = 90$ km und $s = 7$ km in der Oktantenrichtung hier $1''$, 2, für Soldner jedoch $12''$, demnach bei der Konformität weit günstiger. Dagegen hat allerdings die Flächenverzerrung, die nach (4) und (17) bei Soldner vermöge der linearen Beziehung $s' = s \left(1 + \frac{f(o)}{R^2} \sin^2 \varphi \right)$ im durchschnittlichen Mittel $\frac{s^2 \cdot o^2}{2 R^2}$ beträgt, hier den konstanten Wert $\frac{s^2 \cdot o^2}{R^2}$.

Es liegt nahe, dass die älteren graphischen Aufnahmen in den möglichst kleinsten linearen und damit Flächenverzerrungen das wesentlichste Moment erblicken mussten. Mit demselben Rechte kann aber die auf Winkelmessungen sich aufbauende moderne Vermessung, wie schon von Früheren hervorgehoben, das Hauptgewicht auf die geringere Richtungsverzerrung legen; das umsomehr, als die erhöhte mittlere Flächenverzerrung noch innerhalb technisch zulässiger Grenzen bleibt und die linearen Maxima in beiden Systemen die gleichen sind. Ueberdem könnte erstere auch einschliesslich der Reduktion vom Projektions-Horizont auf das thatsächliche Vermessungsniveau in einfachster Weise bei den Schlussflächen berücksichtigt werden.

Innerhalb der oben angegebenen Grenzen lassen sich demnach mittels der Gl. (19) kongruente in konforme Koordinaten überführen. Soll jedoch vom Netze III. Ordnung abwärts an die ebene Triangulirungsberechnung, bzw. die Gleichsetzung der geodätischen mit den ebenen Dimensionen möglich werden,

1) Für $o_1 = o_2$ wird $1 + V = 1 + \frac{o^2}{2 R^2}$.

so kann dies bei grösserer Ausdehnung des einheitlichen Netzes zum Aufgeben der bisherigen einen Vermessungsachse, also zur Anlegung besonderer Kleinsysteme nötigen, in denen die Ordinaten höchstens bis 80 oder 90 km gehen, wobei das Maximum der linearen Verzerrung etwa 1:10 000 ist. Die Wahl der lokalen Vermessungsachsen unterliegt keiner mathematischen Beschränkung, selbst wenn die Beibehaltung der geometrischen Abschlussgrenzen der älteren Landesvermessungsblätter dabei Bedingung wäre. Nur würde es sich bei grösserer Konvergenz der lokalen Achsen mit der Richtung der ursprünglichen Vermessungsachse um umständlichere Transformationsarbeit sowie darum handeln, dass die neuen Achsenrichtungen mit den Blatträndern stärker und geometrisch merkbar divergieren. Das wären indess keine mathematischen, sondern lediglich technische Hemmnisse.

Einschneidender ist die bereits in Theil B erörterte, nicht bloss angenommene, sondern thatsächlich bestehende Bedingung, dass die neuen Koordinaten für die älteren Landesvermessungsblätter unmittelbar benützbar bleiben sollen. Das schränkt nicht nur die den neuen Systemen zu gebenden Abmessungen ein, sondern bedingt auch die Definition der neuen Achsen behufs Herbeiführung der geringst möglichen Achsenkonvergenz. Die Erfüllung dieser Bedingung zwingt daher vermöge der Gl. (10) und (11) wieder dazu, den älteren Ordinatensystemen und dessen Perpendikel im neuen Nullpunkte zu Achsen zu nehmen. Vermittels der Transformationen (6) und (7) gelangt man zu neuen rechtwinklig-sphärischen Koordinaten, die nach den Gl. (19) in rechtwinklig konforme übergeführt werden. Diese beiden Transformationen würden dann zweckmässig in eine verbunden. Sind ξ, η die konformen Koordinaten, a_0, o_0 die des neuen Nullpunktes, so ist nach (19)

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= y \left(1 + \frac{y^2}{6R^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

sodann mit Berücksichtigung von (7) unter Weglassung der Glieder höherer Ordnung als der zweiten

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \Delta a - \frac{\Delta a}{R^2} \left(o - \frac{o_0}{2} \right) o_0 = \Delta a + (\delta) \\ \eta &= \Delta o + \frac{(\Delta a)^2}{2 R^2} o_0 + \frac{(\Delta o)^3}{6 R^2} = \Delta o + (\delta') \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

denen die Zurückführungsformeln entsprechen

$$\left. \begin{aligned} a &= (a_0 + \xi) + \frac{\xi}{R^2} \left(\frac{o_0}{2} + \eta \right) o_0 \\ o &= (o_0 + \eta) - \frac{\xi^2}{2 R^2} o_0 - \frac{(\Delta o)^3}{6 R^2} \end{aligned} \right\} \quad (22a)$$

Diese Transformationen sind demnach nur um Weniges umständlicher als die (7) und gleich diesen leicht tabellarisch einzurichten. Eine sofort anzustellende Untersuchung ergibt, dass die Blattrichtungsdivergenz hier nur um zu vernachlässigende Glieder vierter Ordnung von der bei (9) entwickelten abweicht und daher wieder die Gleichungen bestehen.

$$c = - \frac{l \cdot \Delta a \cdot o_0}{R^2}; \quad c_e = \pm \frac{l \cdot \Delta a \cdot o_0}{2 R^2} \quad (22b)$$

und für $c_e = 0,05$ mm

$$0,0001 R^2 = l \cdot \Delta a \cdot o_0 \quad (22c)$$

Die Blattseitenlängen in der Abscissenrichtung sind hier, wie sich aus der Diskussion der Gl. (14) in Verbindung mit dem Konformitätsprincip ergibt, gleich $l \left(1 - \frac{(2o - o_0)o_0}{2 R^2} + \frac{(\Delta o)^2}{2 R^2} \right)$, demnach in konformen Koordinaten ausgedrückt, um $\frac{l \cdot (\Delta o)^2}{2 R^2}$ vergrößert, während auch die im vorigen Systeme unverändert gebliebenen Blattseiten in der Ordinatenrichtung hier ebenfalls um

$$v_t = \frac{(\Delta o_2)^3 - (\Delta o_1)^3}{6 R^2} = l \cdot \frac{(\Delta o)^2}{2 R^2}$$

vergrößert erscheinen. Das Verhältniss $\frac{v_t}{l}$ ist für $o = \pm 90$ km noch 1 : 10 000 und gibt somit kein Hinderniss ab, die trigono-

metrischen und geometrischen Arbeiten der Landesvermessung vom Netze III. Ordnung abwärts an durchaus in der Ebene zu führen.

Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich dahin aussprechen:

Wenn die Linear-Koordinaten (mit a und $o < 200$ km) einer einheitlich sphärischen Koordinierung in konforme übergeführt werden sollen und dabei die Bedingungen bestehen, dass sodann: 1) die sämtlichen trigonometrischen und geometrischen Arbeiten innerhalb entsprechenden Vernachlässigungsgrenzen in der Ebene zu führen sind, und 2) die neuen Koordinaten ohne technische Schwierigkeiten nicht nur die alten Landesvermessungsblätter wiedergeben, sondern auch für Planarbeiten in diesen unmittelbar als ebene Koordinaten benützbar seien, so führt der einfachste Weg hierzu nur über transformirte (lokale) Koordinaten. Das entsprechende Mittel zu diesem Zwecke liegt dann lediglich in der passenden Wahl der neuen Koordinatenachsen unter veranlasster Begrenzung der lokalen Systeme.

Der Hauptzweck aller dieser Transformationen bestand in dem Wegbringen der sphärischen Beziehungen, bzw. deren unmittelbare Aufnahme in die Koordinaten. Es wird dies gleichermassen erreicht durch transformirte Soldner'sche oder konforme Koordinaten. In theoretischer Beziehung bleiben nach diesen Ueberführungen die bekannten Mängel und Vorzüge beider Koordinatenarten bestehen: Die grössere Richtungsverzerrung und die ungleichmässige Linearverzerrung mit mittlerer geringerer Verzerrung der Flächen bei Soldner, während das Gegenteil für die Konformität gilt. Eine graphische Aufnahme wird sich für das erstere entscheiden können, während der Zahlenmethode der modernen Landesvermessung zumeist die geringere Richtungsverzerrung im Vereine mit der (differentiellen) Gleichmässigkeit der Linearverzerrung als wichtigste Bedingung gilt. Indess kann man sich in einem vorliegenden Kongruenzsystem principiell für die Beibehaltung kongruenter Koordinaten ent-

scheiden, wenn denselben wie hier eine Einrichtung gegeben wird, dass sie technisch als ebene Koordinaten betrachtet werden können und zugleich in den Plänen der einheitlichen Koordinirung unmittelbar verwertbar sind.

D. Es genügt wohl, nur kurz daran zu erinnern, dass durch die Transformationen (7) und (22) wieder sphärische Koordinaten (x, y) , bzw. konforme (ξ, η) gewonnen werden. Zufolge dessen kommt diesen derselbe Anwendungskreis zu, als den ursprünglichen Koordinaten a, o ; sie müssen demnach sämtlich gleichzeitig < 200 km bleiben. Die Bedingung $y < 40$ km oder $\eta < 90$ km gründet sich nur auf die Absicht, innerhalb zulässiger Grenzen mit durchaus ebenen Koordinaten arbeiten zu wollen, und ebenso bezieht sich die in der Gleichung $0,0001 R^2 = l \cdot \Delta a \cdot o$ gegebene Einschränkung der zulässigen Ausdehnung von Δa lediglich auf die unmittelbare Verwertung der neuen Koordinaten in den Messblättern der ursprünglichen (einheitlichen) Koordinirung. Könnte man hiervon absehen, so würde man mit den transformirten (x, y) , bzw. (ξ, η) in den angegebenen Grenzen (200 km) die bekannte sphärische Koordinatenberechnung haben, wie sie im Soldner'schen Systeme durch die Gl. (1) und (15) ausgedrückt ist. Für die Konformität pflegt man allerdings bei der Neuanlage einer umfassenden Landesvermessung einen ganz anderen Weg einzuschlagen, gegründet auf sphäroidische Beziehungen, bzw. geographische Positionen, in Form von Uebertragungen zwischen Ellipsoid oder Kugel und Ebene. Wenn jedoch in einem sphärischen Netze unter Beibehaltung der bisherigen Hauptachse vermittels der Beziehung $\eta = o \left(1 + \frac{o^2}{6 R^2} \right)$ von bereits bestehenden Soldner'schen Koordinaten zu konformen übergegangen worden wäre, so liegt es nahe, die Form der Soldner'schen Berechnungsweise im Wesentlichen beizubehalten, d. h. direkt auf der Kugel zu rechnen. Hierfür kann noch ein weiterer Grund sprechen, wenn nämlich die sphärischen Ergänzungen nicht logarithmisch gerechnet, sondern bezüglich Diagrammen entnommen werden, wie es z. B. im bayerischen Dreiecksnetze zumeist geschieht.

Man kann daher die sphärischen Berechnungsformeln für die konformen Koordinaten den Gl. (1) und (15) anpassen, wobei man in leichter Ableitung die Näherungs-Ausdrücke erhält:

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1 + m + \frac{m}{2R^2} \left(\eta_1^2 - \frac{n^2}{3} \right) \\ \eta_2 &= \eta_1 + n + \frac{n}{2R^2} \left(\eta_1 + \frac{n}{2} \right)^2 - \frac{m^2}{2R^2} \left(\eta_1 + \frac{n}{3} \right) + \frac{n^3}{24R^2} \\ (\varphi_2) &= (\varphi_1) + 180 + \frac{m}{R^2} \left(\eta_1 + \frac{n}{2} \right) \end{aligned} \right\} (y)$$

In einem bereits bestehenden Landesnetze mit rechtwinklig konformen Koordinaten würden diese Ausdrücke nur für einzelne, neu einzuschaltende Punkte I. oder II. Ordnung zur Anwendung gelangen, soweit hierbei sphärische anstatt sphäroidische Rechnung und Einschränkung auf Glieder zweiter Ordnung zulässig ist. Hierfür reichen die Formeln aus und gestatten mit Hilfe jener Diagramme besonders bei den Netzpunkten II. Ordnung erleichterte Rechnung, da das dritte Glied $\frac{n^3}{24R^2}$ noch für $n=17$ km $< 0,005$ m bleibt. Für die sämtlichen geodätischen Arbeiten vom Netze III. Ordnung abwärts an sind aber diese Formeln ebenso, wie vorher für die Soldner'schen Gl. (1) nachgewiesen, technisch unpraktikabel, weshalb hier gleichfalls zur Gewinnung ebener Koordinaten lokale Systeme und Transformationen entsprechend den Gl. (22) geboten sind.

II. Hauptbeziehungen im einheitlichen Koordinaten-System.

1. Graphische Landesaufnahme. Die Darlegungen des vorigen Abschnitts enthalten nur die wesentlichsten Grundlagen in knappster Ausführung. Es ist daher noch in eine Erörterung technischer Einzelheiten einzutreten. Wenn dieselbe auch allgemein gehalten werden soll, so liegt es doch nahe, hierbei die bayerische Landesvermessung vor Allem in Betracht zu ziehen, ist doch dieselbe der Ausgangspunkt und sozusagen das klassische Beispiel der Soldner'schen Projektion und seiner rechtwinklig-sphärischen Koordinaten. Dieselben sind nachher in die Landesvermessungen von Württemberg, Baden, Hessen, Meiningen und Koburg, sodann später noch in die 40 Sonder-Koordinatensysteme der Preussischen Katastervermessung übergegangen, wenn auch die nachfolgende Einzelvermessung sich überall mehr oder minder anders gestaltet hat. Nun besteht jedoch zwischen den genannten Ländern und Bayern ein wesentlicher Unterschied: während in jenen zufolge der geographischen Gestaltung oder, wie in Preussen, auf Grund besonderer Massnahmen, für die den ersten Hauptnetzen nachfolgenden Arbeiten die sphärischen Koordinaten gänzlich oder teilweise als ebene behandelt wurden oder werden, ist dies in Bayern vermöge seiner Querausdehnung von 360 km nicht möglich gewesen. Alle Hemmnisse indess, welche in der rechnerischen und geometrischen Verwertung der sphärischen Beziehungen, Gl. (1)—(5), liegen, treten erst mit zunehmender Ordinate in immer stärkere Wirksamkeit.

Es ist leicht zu sehen, wie für eine nach der graphischen Methode erfolgende Landesvermessung mit zugleich kleinerem

Aufnahmsmassstab die Verhältnisse noch am günstigsten liegen. Das trigonometrische Netz, zumeist nur I. und II., höchstens III. Ordnung, ist weitmaschig, weil in der Regel noch ein graphisches Spezialnetz folgt. Ueberdem wird man für das Hauptnetz und die sich ihm zunächst anschliessenden wichtigeren Punkte (Uebergangspunkte) der II. Ordnung niemals auf sphärische Rechnung verzichten können. Wenn somit auf eine Fläche von 5—10 qkm durchschnittlich nur ein trigonometrischer Punkt entfällt, so sind die technischen Hemmungen infolge der Mitnahme der sphärischen Ergänzungen (1) zu einem Teile unvermeidlich, zum anderen noch zu ertragen, wenn auch immerhin störend. Im nachfolgenden graphischen Dreiecknetze gelangt für die auf ein Blatt aufzutragenden 1—2 trigonometrischen Punkte nur die Gl. (5) (Abszissenverkürzung), höchstens noch bei der Berechnung von Blattdurchschnitten für Orientierungssichten die erste der Gl. (1) in Wirksamkeit. Das letztere könnte auch unterlassen werden, da bei $o = 180$ km die Richtungsverzerrung im schlimmsten Falle noch unter $1'$ bleibt, was für Messtischaufnahme verschwindet. Die Blatthöhenverkürzung Gl. (3), von der äussersten Grenze der geometrischen Merkbarekeit bei $o = 90$ km mit 0,05 mm beginnend bis zu 0,20 mm bei $o = 180$ km für eine Blatthöhe von $0,5 \text{ m}^1$) ansteigend, scheint das wenigste Hemmniss zu bieten, insofern sie nur auf die Anzahl der Blätter sich beschränkt. Die Schwierigkeit liegt hier lediglich in den Grössenbeträgen, die einerseits zu klein sind, um geometrisch scharf zur Darstellung zu gelangen, andererseits vielfach wieder zu gross, um technisch unberücksichtigt bleiben zu können. Die Flächenverkürzung ist zumeist — wie z. B. in Bayern —

¹⁾ Es werden im Folgenden, sofern nichts anderes bemerkt wird, jene kleinen geometrischen Grössen stets in natürlichem Masse angesetzt, da die Verjüngungsmassstäbe und die Blattabmessungen so sehr verschieden sind. Wenn M die Massstabsgrösse (1000, 2000, 2500, 5000 u. s. w.) sein soll, so hat man dann jene kleinen Lineargrössen lediglich mit M , derartige Flächengrössen mit M^2 zu multiplizieren, um zur Vermessungsgrösse zu gelangen.

unbeachtet geblieben, was bei ihrer verhältnismässigen Geringfügigkeit und bei den früher minderen Genauigkeitsanforderungen auch zulässig erschien. Wenn freilich die Blätter in Intersektionsquadrate der Seitenlänge d unter Weglassung der Höhenverkürzung für diese Intersektionslinien eingeteilt und sodann die Flächenquadrate d^2 als Kontrollmassen angesehen wurden, so erscheint hierbei, da doch die Höhenverkürzung wo es anging geometrisch vorgenommen ward, die ganze Verkürzung $\frac{l^2 o^2}{2 R^2}$ der Blattfläche hauptsächlich auf die oberste, bzw. unterste Intersektionsquadratreihe geworfen und hat hierdurch die in dieser enthaltenen Flächen in unzulässig erhöhtem Masse geändert.

2. Zahlenmethode. Aus dem Vorstehenden ist zu ersehen, dass eine einheitlich-sphärische Linearkoordinierung für eine graphische Landesaufnahme älteren Styles zwar auch Hemmungen bereitet, solche jedoch weder umfangreich noch schwierig sind. Das Bild ändert sich aber sofort in der modernen Landesvermessung nach der Zahlenmethode mit ihren gesteigerten Genauigkeitsanforderungen. Hier hat man, wie schon bemerkt, anstatt der früheren 1 bis 3, vielmehr 7 bis 8 Koordinatenpunktordnungen unter Steigerung der Punktzahl um das Mehrhundertfache, während zugleich analytische und geometrische Kleingrössen zur Berücksichtigung gelangen müssen, die man früher mit vollem Rechte unbeachtet lassen konnte. Wenn das hier im Einzelnen nachgewiesen werden soll, so scheiden die Dreieckspunkte I. und II. Ordnung (letztere in Bayern „Uebergangspunkte“ genannt, da sie den Uebergang vom Hauptnetze vermitteln), nach dem obenbemerkten von vornherein aus.

3. Punkt-Ordnungen. Es kann also hinsichtlich der Vergleichen sofort mit den Punkten III. Ordnung begonnen werden. Da indess die Entfernungen der Punkte unter sich, bzw. deren Zahl auf die Flächeneinheit in den verschiedenen Vermessungsgebieten nicht ganz übereinstimmt, so sind hier die entsprechenden Zahlen in den bayerischen Neuvermessungen zu Grunde gelegt. Man hat im Durchschnitte:

Koordinatenpunkt- Ordnung.	1 Punkt auf	Punktzahl auf 100 qkm.	Bezeichnung.
III.	6,0 qkm	17	Dreieckspunkte.
IV.	0,5 „	200	„
V.	1,0 „	100	Trigonometrische Beipunkte.
VI.	0,02 „	5000	Polygonpunkte u. polyg. Beipunkte.
VII.	unbestimmt	unbestimmt	Hilfspolygon- punkte u. s. w.
VIII.	„	„	Liniennetzpunkte, deren Koordinaten z. T. zu rechnen sind.

Wie die Zahlenrechnung sich gegen früher gehäuft, oder vielmehr gegenüber der graphischen Punktbestimmung ganz neu auftritt, ist daraus ohne Weiteres ersichtlich. Hier interessiert nur, wie die Arbeiten durch das ganze oder teilweise Mitnehmen der sphärischen Ergänzungen bei einheitlich-sphärischen Koordinaten erschwert und unsicher werden.

4. Verzerrungsgrößen. Aus den Gl. (17) findet man leicht, dass das lineare Maximum in der Abszisse, das der Richtung im Oktanten liegt. Es leiten sich nun die Maxima v und v' mit folgenden Werten ab:

$o :$	20	40	60	90	180 km
$v :$	$\frac{1}{200000}$	$\frac{1}{50000}$	$\frac{1}{23000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{2500}$
$v' :$	1"	3"	6"	12"	45" (für $s = 7$ km).

Diese Zahlen lehren folgendes: Die Triangulierung III., IV. und V. Ordnung muss mindestens von $o = 20-40$ km an die sphärischen Ergänzungen — der Kürze halber nunmehr die sphär. δ genannt — mitnehmen, um nicht merklich über den Betrag der derzeitigen mittleren Standfehler $\mu = 1-3''$ hinauszugehen. In der Polygonisierung wird von 60—70 km

die Ableitung der (orientirenden) Direktionswinkel sphärisch zu erfolgen haben, indem sonst Querverschwenkungen längerer Züge eintreten könnten. Ebenso muss hier von $\sigma = 90-100$ km an mindestens das wesentliche Glied (δa) der sphär. Ergänzungen mitgenommen werden, weil gegenteiligen Falles hauptsächlich die Richtungs-, teilweise auch die linearen Verzerungen über das für heutige Einzelaufnahmen zulässige Mass hinausgingen.

In diesem, gänzlichen oder teilweisen, Mitnehmen der sphär. δ steckt nicht nur eine Menge von Arbeit, es liegen in ihm auch noch ergiebige Fehlerquellen, die unter dem gleichzeitigen Mitwirken abkürzender Vernachlässigungen dem ganzen Arbeitsergebnisse Schwerfälligkeit und Unsicherheit verleihen. Einige Beispiele werden das deutlicher zeigen, wobei selbstverständlich nur die Vermessungsgebiete über 20 (Triangulirung) und über 60, bzw. 90 km (Polygonisirung) in Frage kommen.

5. Triangulirung. Bei der trigonometrischen Punkteinschaltung sind im Allgemeinen für jeden Punkt $2n$ bis $3n$ sphär. δ zu berücksichtigen, wenn der Punkt durch n Strahlen festgelegt ist. Hierbei sind die für die Berechnung der vorläufigen Koordinatenwerte etwa erforderlichen δ noch gar nicht mitgezählt. Vielfach wird aber schon jene vorläufige Ortsberechnung mit den sphär. δ zu führen sein, einerseits um bei Näherungsausgleichung den vorläufigen Ort möglichst scharf zu bekommen, andererseits um bei der M. d. kl. Q. die aw, bw der Normalgleichungen nicht so gross werden zu lassen. Für jeden solchen Dreieckspunkt hat man also z. B. bei durchschnittlich $n = 6$ Strahlen, 12 bis 18 sphär. δ und ebensovieler algebraischer Additionen. Erwägt man, welche Irrungen in der numerischen Ableitung, in der Beachtung der algebraischen Vorzeichen und in den Additionen selbst möglich sind und wie die Zahl der Dreieckspunkte in der jetzigen Vermessung gestiegen ist, so wird deutlich, wie sehr die sphärischen Koordinaten zu Hemmungen und Unsicherheiten führen.

6. Polygonisierung. Ein Aehnliches gilt für die Polygonisierung. Hier ist die sphärische Direktionswinkelableitung von $o = 60$ km an eine unangenehme Erschwerung, was in weitaus verstärktem Masse von 90 km an auch für die Mitnahme der sphär. (δa) gilt (selbstverständlich ist bei letzterem nur das erste Glied von (δa) , also $\Delta a \cdot \frac{o_2^2}{2R^2}$ mitzunehmen). Man wird hier kurz den Betrag summarisch für den ganzen Zug ableiten und sodann vor der Zugausgleichung algebraisch verhältnissgleich auf die einzelnen Abszissenunterschiede verteilen. Ein Verzicht auf diese Mitnahme ist ganz undenkbar. Denn wenn auch für Züge in der Abszissenrichtung das (δa) als Messungsfehler verteilt werden könnte, so verhinderte doch die Nichtbeachtung jede Beurteilung der Zuggenauigkeit, da von 90 bis 180 km das (δa) für den Kilometer von 10 bis 40 cm ansteigt. Anders, wenn der Zug gebrochen, bzw. gebogen ist, oder nach der Oktantenrichtung neigt. Dann treten die vernachlässigten Ergänzungen — nach den obigen Ziffern mit 10 bis 40" Richtungsverzerrung — als Querabweichungen auf, was Winkeländerungen im Zuge hervorruft, die über die heutige Messungsgenauigkeit weit hinausgehen. Es müssen somit die sphär. (δa) von den bezeichneten Grenzen an mitgenommen werden, was bei der grossen Anzahl von Polygonpunkten doppelt ins Gewicht fällt.

7. Koordinatenauftrag. Die Blatthöhen- und die Abszissenverkürzungen bei der Planherstellung — Gl. (3) und (5) — wird man von der äussersten Grenze der geometrischen Darstellbarkeit, d. h. von 0,05 mm an aufwärts, berücksichtigen müssen. Das beginnt bei $o = 90$ km und steigt bei 180 km bis auf 0,20 mm für l , bzw. $(a - a_n) = 0,5$ m. Die Schwierigkeiten sind hier für die Blattverkürzung und den Abszissenauftrag zwar beiderseits vorhanden, jedoch in ihrer Wirkung verschieden. Der Betrag v_h lässt sich anfänglich, z. B. von $o = 90$ bis 120 km geometrisch kaum darstellen, während andererseits dessen Nichtberücksichtigung, besonders im Kartirungsvergleiche der treffenden Blattseite mit jener des an-

stossenden Blattes, zu Differenzen führt, welche die Grenzen der geometrischen Merkbareit zwar bloß streifen, aber doch Unsicherheit in das bezügliche Planbild bringen. Für $o > 120$ km ist unter Verminderung der geometrischen Schwierigkeit die Notwendigkeit der technischen Beachtung des v_h umsomehr gegeben. In den Verkürzungen v_a , selbst wenn sie nicht für jeden Punkt besonders berechnet, sondern für Punkte westöstlicher (Ordinaten-)Richtung in Schichten gewissermassen interpolatorisch behandelt werden, stecken wieder eine Menge von Arbeit und Fehlerquellen, hinsichtlich letzterer insbesondere in dem algebraischen Hinzufügen der v_a zu den Abszissenresten. Ein besonderer Umstand erschwert die Sache noch. Jene Reste werden zweckmässig von den Intersektionslinien aus aufgetragen. Diese sind aber sphärische Koordinatenlinien und sollten streng genommen, ihrer Abszissendifferenz mit dem Blattrande entsprechend, unter Beachtung der mittleren Blatt-Ordinate gleichfalls verkürzt werden. Das geht aber aus doppelten Gründen nicht. Einmal wegen der heute überall maschinell bewirkten Konstruktion des Blattes mit seinen Intersektionen, wo selbstverständlich nur konstante Abstände der letzteren brauchbar sind; diese jedoch nachträglich mit $\frac{3}{4} v_h$, $\frac{1}{2} v_h$, $\frac{1}{4} v_h$ geometrisch verbessern zu wollen, würde bei der zunehmenden Kleinheit jener Grössen bis zur letzten Intersektionslinie zwar nicht unmöglich, wohl aber das Gegenteil von Schärfe sein. Hiernach müssen nun zwar die mit den Abscissen der Intersektionslinien und den Punktabscissen a gebildeten Abszissenreste von jenen (konstanten) Linien aus aufgetragen, die Verkürzung $v_a = \frac{(a - a_n)}{2 R^2} o^2$ aber muss mit der Abszisse a_n des unteren, bzw. oberen Blattrandes abgeleitet werden. Das alles gibt bei der grossen Zahl der Polygonpunkte eine verwirrende Menge von Zahlbeziehungen.¹⁾

¹⁾ Die Sache würde noch verwickelter, wenn man bei Neuvermessungen in einer älteren Landesvermessung die geometrischen Blattabschlüsse jener Vermessung beibehalten will oder muss. Diese Abschlüsse und ebenso die Blattintersektionen sind nämlich Vielfache von Hunderten

8. Liniennetz. Im Liniennetz besteht vielfach die Notwendigkeit, für bestimmte Punkte desselben die Koordinaten zu rechnen. Dass deren Auftrag gegebenenfalls wieder mit Berücksichtigung der Abszissenverkürzung zu geschehen hat, ist ohne Weiteres klar. Man hat gemeint, dieser Notwendigkeit zu entgehen, indem jene Punkte ja nicht sphärisch gerechnet werden. Diese Meinung wäre jedoch nur zutreffend, wenn die Punkte nicht mittels absoluter Koordinaten, sondern lediglich durch die auf den Ausgangspunkt bezogenen, also relativen Koordinatenunterschiede aufgetragen würden. Aber selbst dann muss man sich klar werden, dass auch für Liniennetzpunkte die lineare und die Richtungsverzerrung von $o = 100$ km an aufwärts Beträge erreichen, deren rechnerische oder geometrische Nichtbeachtung genauigkeitsmindernd wirkt. (So steigt z. B. für $o = 180$ km und $s = 0,25$ m das Max. für v_s auf 0,10 und für v_r (linear) auf 0,05 mm, also im 1000-t. Massstabe 10, bzw. 5 cm). Dass solche Beträge nicht mitgenommen werden, ist erklärlich, vielleicht ebenso, dass man den hierin liegenden Verzicht auf rechnerische und geometrische Genauigkeit unterschätzt oder ihn als unvermeidlich betrachtet.

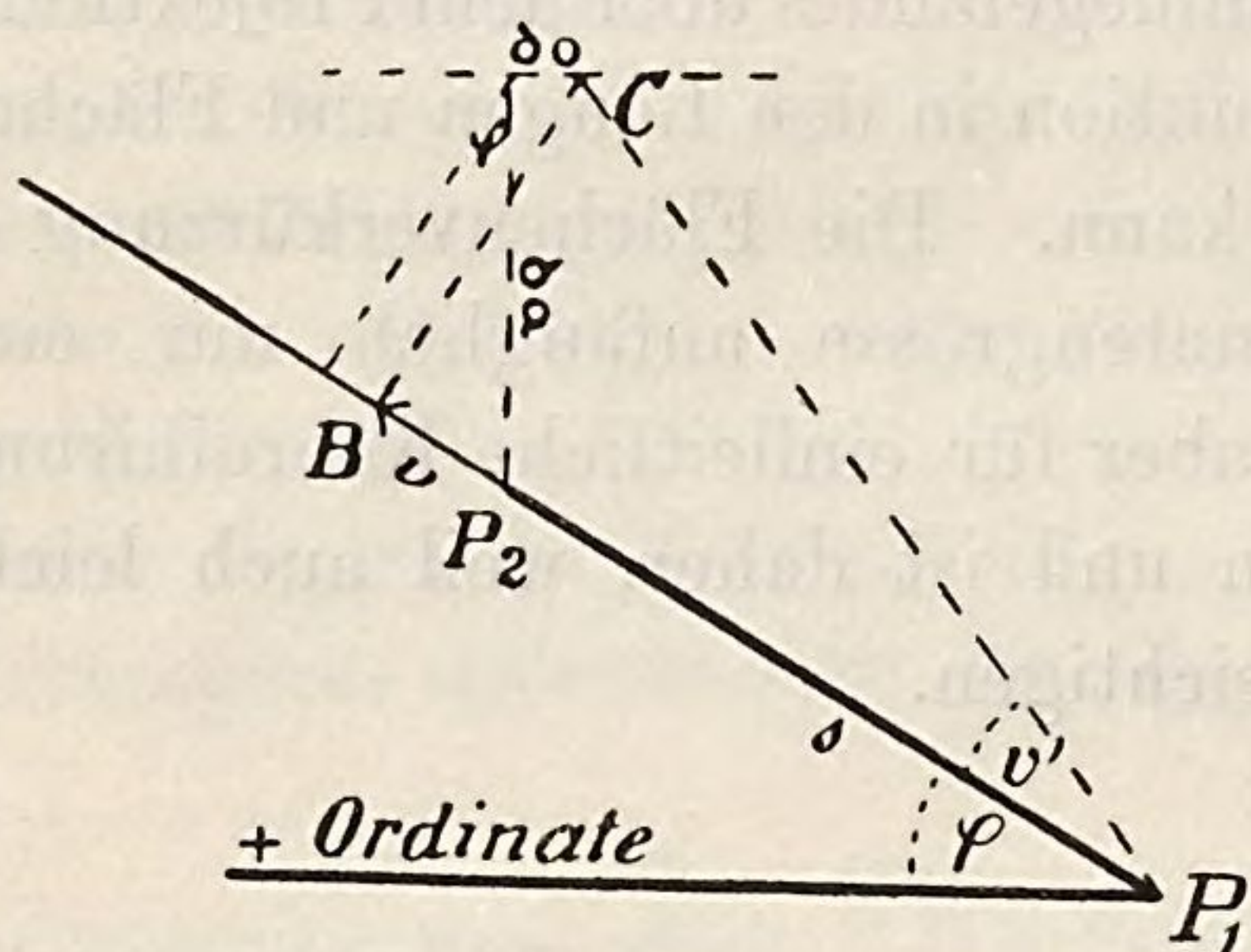
der damaligen Masseinheit. Z. B. in Bayern hatte das Blatt $16'' = 466,9745$ mm Länge (im 5000-t. Masstabe $8000' = 2334,873$ m) und wurde in Intersektionen zu $4'' = 116,74$ mm ($2000' = 583,718$ m) geteilt. Behielte man zum Koordinatenauftrage die bisherigen Blattränder und Intersektionen bei, deren Koordinaten jetzt in Metermass durchaus irrationale Zahlen sind, so hätte man Hunderte von Subtraktionsbildungen bis zum Centimeter herab für ein Blatt, also gesteigerte Arbeit und damit gesteigerte Wahrscheinlichkeit eintretender Subtraktions- (Dezimeter-)fehler. Lässt man die Blattränder und Intersektionen für den Koordinatenauftrag fallen und vollzieht diesen von Intersektionen aus, die ein Vielfaches von Hunderten des Meter sind, so hat man zwar erleichterte Subtraktion, muss aber dann die für die Abszissenverkürzung v_a benötigten Abszissenunterschiede der Gl. (5) auf die unterste (bzw. oberste) Intersektion beziehen und gleichfalls mit Bezug auf diese auch für die beiden Blattränder (oben und unten) die entsprechenden v_a ableiten und auftragen. Das ist gewiss das Gegenteil von Einfachheit, aber unvermeidlich, wenn man nicht grobe und systematische Fehler begehen will.

9. Flächenberechnung. Hinsichtlich der Flächenberechnung sei kurz bemerkt, dass die entsprechende Verkürzung Gl. (4) im Ganzen leicht anzubringen und der Betrag auf die einzelnen Polygonmassen flächenproportional zu verteilen ist. Es genügt hier in der Regel die Anwendung einer Mittelordinate o , da der Unterschied in der Höhenverkürzung der inneren und äusseren Blattseite nur $\frac{l^2 o}{R^2}$ beträgt. Das macht z. B. für ein bayerisches Messblatt im 5000-t. Massstabe bloss 24 mm bei $o = 180$ km oder in der Fläche bei Anwendung der Mittelordinate nur 28 qm, so dass diese innerhalb jener Grenze praktisch hinreicht. Die späteren Ausführungen (Nr. 25) werden zeigen, dass nicht allein die Netzverzerrung, sondern auch die durch die Höhenlage des Aufnahmegeländes über dem Projektionshorizont veranlasste Höhenreduktion in den Längen und Flächen leicht berücksichtigt werden kann. Die Flächenverkürzung v , allein ist bei mässiger Ordinatengrösse anfänglich nur eine theoretische Forderung, wird aber für einheitliche Koordinirung mit grossen o zur praktischen und ist daher, weil auch leicht anzubringen, stets zu berücksichtigen.

III. Lokale Systeme rechtwinklig-sphärischer Koordinaten.

10. Projektionsverzerrungen I. Die Bedeutung der Verzerrungsgrößen Gl. (17) für Theorie und Praxis lässt es zuvor noch angemessen erscheinen, dieselben auf möglichst ein-

Fig. 1.



fachem und geometrisch anschaulichem Wege abzuleiten. Aus der nebenstehenden Figur erkennt man sofort die Strecke P_2B als die lineare sv , die Strecke BC bzw. den Winkel $(\varphi' - \varphi)$ als die Richtungsverzerrung sv' , wenn die sphärischen Koordinaten der Punkte P_1P_2 als ebene Koordinaten betrachtet werden.

den.¹⁾ Es sind aber, die sphärischen Ergänzungen $(\delta\alpha)$ und (δo) benützt, die Projektionen

$$P_2B = (\delta\alpha) \sin \varphi + (\delta o) \cos \varphi; \quad BC = (\delta\alpha) \cos \varphi - (\delta o) \sin \varphi,$$

mithin erhält man die verzerrte Länge s' aus der sphärischen Seite s durch den Ausdruck

$$s' = s(1 + v) = s \left(1 + \frac{(\delta\alpha) \sin \varphi + (\delta o) \cos \varphi}{s} \right) \quad (A)$$

¹⁾ Man wird die Figur jedenfalls nicht so auffassen, als würde der Punkt P_2 nach C verlegt. Das von C auf die durch P_1 gehende Ordinatenrichtung gefällte Perpendikel ist lediglich die ebene Abbildung des Unterschiedes $(a_2 - a_1)$ auf der allgemeinen Vermessungs- (Abszissen-) Achse.

und ähnlich

$$(\varphi' - \varphi) = v' = \frac{(\delta a) \cos \varphi - (\delta o) \sin \varphi}{s} \quad (\text{A}')$$

Es ist zuerst

$$\begin{aligned} (\delta a) \sin \varphi &= \frac{m}{2R^2} \left(o_2^2 - \frac{n^2}{3} \right) \sin \varphi = \frac{m}{2R^2} \left(o_1^2 + 2o_1 n + \frac{2n^2}{3} \right) \sin \varphi \\ &= \frac{s}{2R^2} \left(o_1^2 + 2o_1 n + \frac{2n^2}{3} \right) \sin^2 \varphi, \end{aligned} \quad (\text{a})$$

indem $o_2 = o_1 + n$ und $m = s \cdot \sin \varphi$ gesetzt wird.

Für das zweite Glied $(\delta o) \cos \varphi$ folgt bei Einführung von $s = \frac{n}{\cos \varphi}$

$$\begin{aligned} -\frac{m^2}{2R^2} \left(o_1 + \frac{n}{3} \right) \cos \varphi &= -\frac{s}{2R^2} \left(o_1 + \frac{n}{3} \right) \cos \varphi \cdot \frac{n}{\cos \varphi} \sin^2 \varphi \\ &= -\frac{s}{2R^2} \left(o_1 n + \frac{n^2}{3} \right) \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Wird eine Mittelordinate $\frac{o_1 + o_2}{2} = o$ eingeführt und von den Beziehungen $o = o_1 + \frac{n}{2}$ und $o_1 = o - \frac{n}{2}$ Gebrauch gemacht, so gibt die Addition von (a) und (b) unter vorläufiger Ausscheidung des Gliedes $\frac{n^2}{12}$ bei gleichzeitiger Division mit s die Vergrößerung v wie in (17)

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{o^2}{2R^2} + \frac{n^2}{24R^2} \right) \sin^2 \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{24R^2} (3(o_1 + o_2)^2 + (o_2 - o_1)^2) \\ &= \frac{\sin^2 \varphi}{6R^2} (o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2) \end{aligned} \quad (17^*)$$

woraus für $o_1 = o_2$ der Wert $v = \frac{o^2}{2R^2} \sin^2 \varphi$ folgt.

Für v' hat man aus (A') zunächst

$$\begin{aligned}\frac{(\delta a) \cos \varphi}{s} &= \frac{m}{6 R^2} (3 o_2^2 - n^2) \frac{\cos \varphi}{s} = \frac{m}{6 R^2} (3 o_1^2 + 6 o_1 n + 2 n^2) \frac{\cos \varphi}{s} \\ &= \frac{m}{6 R^2} (3 o_1^2 + 6 o_1 n + 2 n^2) \frac{\cos^2 \varphi}{n},\end{aligned}$$

wo zum Schlusse $s = \frac{n}{\cos \varphi}$ eingeführt ist. Die Zerlegung und teilweise Division durch n ergibt unter Wiedereinführung von $n = s \cos \varphi$ im ersten Teile

$$\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{6 R^2} (3 o_1^2 + 3 o_1 n + n^2) + \frac{m}{6 R^2} (3 o_1 + n) \cos^2 \varphi \quad (c)$$

Aehnlich folgt für das zweite Glied in (A')

$$- \frac{(\delta o) \sin \varphi}{s} = \frac{m^2}{6 R^2} \cdot \frac{(3 o_1 + n)}{s} \sin \varphi = \frac{m}{6 R^2} (3 o_1 + n) \sin^2 \varphi \quad (d)$$

woraus durch Addition von (c) und (d) unter Beachtung von $o_2 = o_1 + n$

$$v' = \frac{m}{6 R^2} (2 o_1 + o_2) + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{6 R^2} (3 o_1^2 + 3 o_1 n + n^2) \quad (e)$$

Hier lässt sich n noch eliminiren. Es ist $n = o_2 - o_1$, folglich $(3 o_1 + n) n = (o_2 + 2 o_1) (o_2 - o_1) = (o_2^2 + o_1 o_2 - 2 o_1^2)$, dessen Einsetzung in das zweite Glied von (e) gibt

$$v' = \frac{a_2 - a_1}{6 R^2} (2 o_1 + o_2) + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{6 R^2} (o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2) \quad (17^{**})$$

Das ist die zweite der Gleichungen (17) und damit die Aufgabe gelöst. Die beiden (17) sowie die Figur zeigen unmittelbar, dass die lineare Verzerrung in der Abszissenrichtung ihr Maximum hat und in der Ordinatenrichtung Null ist, während das Maximum der Richtungsverzerrung im Oktanten liegt. Hieraus folgt ohne Weiteres für die Soldner'sche Projektion die Unmöglichkeit, eine beliebige Figur der sphärischen Fläche in ihren kleinsten Teilen in der Ebene ähnlich abzubilden, weil dies die Gleichmässigkeit der Vergrößerung in einem Punkte nach allen Richtungen hin zur Voraussetzung hat.

Gehen wir nun zu den technischen Folgerungen über. Die Unterschiede $\frac{s' - s}{s} = v$ und $(\varphi' - \varphi) = v'$ wachsen annähernd im quadratischen Verhältnisse der Ordinaten (o^2). Bis zu einer gewissen Grenze o wird man, je nach dem Arbeitszwecke, die Beträge der v und v' vernachlässigen, d. h. die sphärischen Koordinaten als ebene betrachten dürfen. Die Darlegungen der Abschnitte I und II liessen erkennen, dass jenes Bedürfniss für eine graphische Landesaufnahme vermöge der geringen Zahl der Koordinatenpunkte und da doch mindestens die zwei höchsten Netzordnungen stets einheitlich sowie unter Berücksichtigung der Erdkrümmung zu koordiniren sind, noch nicht dringend war. Das letztere ist es erst geworden durch die Einführung der Zahlenmethode, den höheren Genauigkeitsanforderungen und dem damit verbundenen Anwachsen der Zahl der Koordinatenpunkte. Für diese ist weithinein, bedingt nach ihrer Verwendungsart in verschieden räumlicher Ausdehnung, die ganze oder teilweise Mitnahme der sphärischen Ergänzungen notwendig, sofern die einheitlich-sphärische Koordinirung über gewisse Grenzen (20, 40, 60, 90 km in der Ordinate) hinausgeht. Die hieraus fliessenden Nachteile: Arbeitsmehrung, Fehlerquellenerschliessung und Unsicherheit, dann grössere Ungenauigkeit in der geometrischen Herstellung des Planbildes, wurden schon erörtert. Alle diese Nachteile kommen überwiegend zum Verschwinden, wenn man die sphärischen Ergänzungen und damit bei der Kartirung die geometrischen Minimalgrössen innerhalb bestimmter Grenzen von vornherein in die Koordinaten aufnimmt. Das kann nur geschehen durch Bildung von lokalen Koordinatensystemen, innerhalb deren die Projektionsverzerrungen gegen die Null konvergiren, d. h. die sphärischen Koordinaten als ebene angesehen werden können. Offenbar ist dies leichter zu erreichen, wenn es bei Neuanlage einer Landesvermessung zur planmässigen Einführung gelangt, schwieriger, wenn solche Sondersysteme in den Rahmen einer bereits vorliegenden einheitlichen Koordinirung und Landesvermessung nachträglich erst einzufügen sind.

11. Bedingung für die Kleinsysteme. Der Zweck dieser Sondersysteme, durch die Gewinnung als eben zu betrachtender Koordinaten eine brauchbare Grundlage für die Vornahme grösserer Netzverdichtungen und Erneuerungsmessungen zu liefern, wird hier zumeist an die Bedingung gebunden sein, die neuen Koordinaten der gegebenen Anschlusspunkte in einfachster Weise ableiten und die gesamte neue Koordinierung zugleich auch unmittelbar für besondere Anwendungen im früheren einheitlichen System benützen zu können. Hieraus folgt die Notwendigkeit einfach tabellarischer Umformung. Der zuzweit erwähnten Anwendungen kann es mehrfache geben. An den Grenzen von Neumessungsgebieten fallen zumeist eine grössere Anzahl von Koordinatenpunkten in das anstossende (altvermessene) Gebiet. Der Katasterfortführungs- (Ummessungs-) Dienst wird vielfach genötigt sein, mehrere in jene verschiedenen Aufnahmegebiete fallende Koordinatenpunkte gleichzeitig zu verwerten. Soweit es sich hierbei um Ergänzung des Planbildes im alten Aufnahmegebiete handelt, sind sodann die neuen Punkte in den alten Plan einzutragen. Ein anderes Beispiel bietet die Grundstückszusammenlegung (Flurbereinigung) in Bayern. Dieselbe kartirt selbst ihre auf trigonometrischer und polygonometrischer Grundlage beruhenden geometrischen Schlussergebnisse wieder in die alten (lithographirten) Pläne. Wollte man für diese beiden Zwecke wieder allgemeine (sphärische) Koordinaten haben, so müssten die dann notwendigen Zurücktransformierungen (d. h. lokale Koordinaten wieder in allgemeine) notwendig in „einfachster Weise“, also tabellarisch mit wo möglich nur einem Gliede vollziehbar sein. Hierdurch wird aber nicht nur die Ausdehnung der lokalen Systeme, sondern auch die Definition der neuen Koordinaten bedingt. Eine weitere Erschwerung tritt ein, wenn sogar jene Zurücktransformierung vermieden, vielmehr die „unmittelbare“ Benützung der neuen Koordinaten (mit geometrisch unmerkbarer Vernachlässigung) ermöglicht werden soll. Beide Bedingungen, insbesondere die zweite, erheischen die möglichst geringste Konvergenz der alten und neuen Achsen-

richtungen. Hiermit ist wegen der Grösse der Meridiankonvergenz ausgeschlossen, die Meridiane der neuen Koordinaten-Nullpunkte zu Achsen zu nehmen, was bereits S. 11 betont wurde. Jenen Bedingungen wird daher nur die Definition in A (S. 12) gerecht, wonach der alte Ordinatenkreis des neuen Nullpunktes Hauptachse, der in diesem Punkte auf jenem Kreise senkrecht stehende Vertikalschnitt Vermessungsachse ist. Diese Zweckmässigkeit hat die Entwicklung der Formeln (7)—(11) zur Genüge bewiesen.¹⁾

12. Anordnung der Kleinsysteme. Die technische Aufgabe ist nun, die in sphärischen Linearkoordinaten α, o gegebenen Punkte höherer Ordnung (I und II, höchstens III) in gleichfalls sphärische Lokalkoordinaten x, y überzuführen, auf Grund deren dann alle nachfolgenden trigonometrischen, polygonometrischen und geometrischen Arbeiten in der Ebene vollzogen werden können, falls die Ausdehnung der lokalen Systeme sich innerhalb der durch die Gl. (11) gegebenen Grenzen hält. Für die zur Erläuterung hier folgenden Beispiele und numerischen Auswertungen erscheint es zweckmässig, an bestimmte Verhältnisse anzubinden. Als solche seien die der bayerischen Landesvermessung hier angenommen.

Die erste Hauptfrage betrifft die den lokalen Systemen zu gebende Querausdehnung (Maximal-Ordinate $\pm$). Die frühere Aufstellung (S. 28) hat die maximale Richtungsverzerrung bei

¹⁾ Man hat gegen jene Achsen-, bzw. Koordinaten-Definition geltend gemacht, dass dieselbe in Bezug auf die niemals abzuschaffenden geographischen Koordinaten starke Unzuträglichkeiten mit sich brächte. Das kommt auf die Art der allgemeinen Landeskoordinirung an. Wenn diese, wie z. B. in Bayern, Württemberg u. s. w. durchaus in sphärischen Linearkoordinaten erfolgte, so hat man es in der Landesvermessung, insbesondere vom Netze II. Ordnung abwärts an, niemals mehr mit geographischen Positionen zu thun. Und sollte ausnahmsweise diese Notwendigkeit je im einzelnen Falle eintreten, so führt man mit Hilfe der bezüglichen Transformationstabelle in 1—2 Minuten Zeitaufwand die lokalen Koordinaten in allgemeine über und hat dann die gewöhnliche Rechnung zur Herleitung geographischer Positionen aus (meridionalen) Linearkoordinaten.

$o = 40$ km mit $v' = 3''$ und die lineare Abweichung mit $v = 1 : 50\,000$ ergeben. Diese letztere würde zwar ein weiteres Hinausgehen gestatten, doch erscheint es nicht geraten, das v' über $3''$, den heutigen mittleren Standfehler der Kleintriangulierung, anwachsen zu lassen. Die $6''$ bei $o = 60$ km möchten schon zu hoch sein, da es sich um einen systematischen Fehler handelt. Es werde daher bei $o = 40$ km stehen geblieben.¹⁾ Hiernach haben sich für Bayern (einschliesslich der Rheinpfalz) die aus der graphischen Anlage ersichtlichen 9 lokalen Systeme ergeben, deren Ausdehnung in der Abszisse durch die massgebende Gl. (11) bestimmt ist.

13. Hilfstafeln für die Transformationen. Die Transformationen (7) lassen sich leicht logarithmisch machen; noch einfacher erscheint jedoch ihre tabellarische Behandlung. Die bezügliche Einrichtung wird dabei wesentlich bedingt durch die Forderung, die Transformation in unabhängiger Weise prüfen zu können, was durch Zurücktransformierung geschieht. Man könnte nun die erste numerisch mit der Tabelle und die zweite logarithmisch vollziehen. Einfacher erscheint indess die durchaus numerische Behandlung, nur muss dann bei der Prüfung (Zurücktransformierung) mit anderen Argumenten in die Tabelle eingegangen werden, um durch die veränderten Zahlen die nötige Unabhängigkeit zu gewinnen.

Setzt man in den Gl. (7)

$$\frac{o_0}{R^2} = q \quad \text{und} \quad \frac{o_0}{2R^2} = k$$

so schreiben sich diese

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta a + \delta = \Delta a - q \cdot \Delta a \left(o - \frac{o_0}{2} \right) \\ y &= \Delta o + \delta' = \Delta o + k (\Delta a)^2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

und die Zurücktransformierungen (8)

$$\left. \begin{aligned} a &= (a_0 + x) + \delta_1 = (a_0 + x) + q \cdot x \left(\frac{o_0}{2} + y \right) \\ o &= (o_0 + y) + \delta'_1 = (o_0 + y) - k \cdot x^2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

¹⁾ Die Koordinaten der Punkte III. Ordnung werden für $y > 20$ km noch sphärisch abgeleitet wegen $v' > 1''$.

Im bayerischen Netze sind die o_0 gleich 80 und 160 km. Somit folgt mit $\log R = 6,805\,3766$

$$\begin{array}{ll} \log q_{+80} = 1,29234 & \log k_{+80} = 0,99131 \\ \text{„ } q_{-80} = 1,29234 \, n & \text{„ } k_{-80} = 0,99131 \, n \\ \text{„ } q_{+160} = 1,59337 & \text{„ } k_{+160} = 1,29234 \\ \text{„ } q_{-160} = 1,59337 \, n & \text{„ } k_{-160} = 1,29234 \, n \end{array}$$

Mit dem Argumente $\left(o - \frac{o_0}{2}\right)$, bzw. x , sind nun in Intervallen von 200 m die Werte $q \left(o - \frac{o_0}{2}\right)$ und $k (\Delta a)^2$, bzw. $q \cdot x$ und $k x^2$, tabuliert. Die $k (\Delta a)^2$ und $k \cdot x^2$ geben ohne weiteres die Transformationsglieder δ' und δ'_1 , während die erst aufgeführten Werte noch mit den (abgekürzten) Δa , bzw. $\left(\frac{o_0}{2} + y\right)$ zu multiplizieren sind, um die δ , bzw. δ_1 , zu erhalten. Werden die Argumente, mit denen in die Tabelle eingegangen wird, durch fetten Druck hervorgehoben, so hat man für die Berechnung der (23), allgemeine in lokale Koordinaten:

$$\left. \begin{array}{l} x = \Delta a + \delta; \quad y = \Delta o + \delta' \\ \delta = -q \left(\text{o} - \frac{o_0}{2}\right) \Delta a \\ \delta' = k (\Delta a)^2 \end{array} \right\} \quad (23 \text{ a})$$

Die Prüfung erfolgt durch Zurücktransformierung, lokale in allgemeine Koordinaten, jetzt aber behufs unabhängiger Rechnung mit geänderten Argumenten:

$$\left. \begin{array}{l} a = (a_0 + x) + \delta_1; \quad o = (o_0 + y) + \delta'_1 \\ \delta_1 = q x \left(\frac{o_0}{2} + y\right) \\ \delta'_1 = -q x \cdot \frac{x}{2} \end{array} \right\} \quad (24 \text{ a})$$

Am Schlusse ist eine Seite der Tabelle abgedruckt, um deren Einrichtung erkennen zu lassen. (Die für das ganze bayerische Netz ausreichende Tabelle hat blos 5 Seiten.)

14. Umformungsbeispiel I. Gegeben seien im Systeme III ($a_0 = + 180 \text{ km}$; $o_0 = + 80 \text{ km}$) zwei Punkte $P_1 P_2$, deren Koordinaten

$$a_1 = + 240\,000,00 \text{ m}; \quad o_1 = + 80\,000,00 \text{ m}$$

$$a_2 = + 244\,950,19 \text{ „} \quad o_2 = + 84\,949,73 \text{ „}$$

zu transformieren sind. Man hat die Rechnung nach (23a) unter sofortiger Anfügung der Prüfung (nach 24a) wie folgt:

<u>$a_0 = + 180\,000,00$</u>	<u>$o_0 = + 80\,000,00$</u>
Abszisse.	Ordinate.
$a_1 = + 240\,000,00$	$o_1 = + 80\,000,00$
$\Delta a_1 = + 60\,000,00$	$\Delta o_1 = 0,00$
$\delta = - 4,70 \underline{4784} \times 6000$	$\delta' = + 3,53$
<u>$x_1 = + 59\,995,30$</u>	<u>$y_1 = + 3,53$</u>
$\delta_1 = + 4,70 \underline{1176} \times 4000$	$\delta'_1 = - 3,53 \underline{1176} \times 3000$
$a_0 = + 180$	$o_0 = + 80$
<u>$a_1 = + 240\,000,00$</u>	<u>$o_1 = + 80\,000,00$</u>

In ähnlicher Weise folgen für den Punkt P_2 die beiden δ mit $- 5,72$ und $+ 4,13$, somit

$$x_1 = + 59\,995,30 \quad y_1 = + 3,53$$

$$x_2 = + 64\,944,47; \quad y_2 = + 4\,953,86$$

Leitet man jetzt die Polarkoordinaten zwischen den zwei Punkten, einmal im allgemeinen, dann im lokalen Systeme ab, so folgt aus den Gl. (2):

$\Delta a = + 4\,950,19$	$\Delta o = + 4\,949,73$
<u>$-(\delta a) = - 44$</u>	<u>$-(\delta o) = + 2$</u>
$+ 4\,949,75$	$+ 4\,949,75,$

woraus sofort $\varphi_1 = 45^\circ 00' 00''$ und $\varphi_2 = 225^\circ 00' 05''$, mit denen

$\log (\Delta a - (\delta a)) = 3,694\,5830$	$\log (\Delta o - (\delta o)) = 3,694\,5830$
<u>$\text{„} \sin \varphi_1 = 9,849\,4850$</u>	<u>$\text{„} \cos \varphi_1 = 9,849\,4850$</u>
$\log s = 3,845\,0980$	$\log s = 3,845\,0980$

$s = 7000,00 \text{ m}$ folgt. Aehnlich erhält man im lokalen Systeme (wobei die δx und δy wegen y nahezu Null hier gleichfalls 0 werden)

$$\begin{array}{rcl} \Delta x & = & + 4\,949,17 \\ - (\delta x) & = & - \quad 0,00_1 \\ \hline & & + 4\,949,17 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \Delta y & = & + 4\,950,33 \\ - (\delta y) & = & + \quad 0,00 \\ \hline & & + 4\,950,33 \end{array}$$

und weiter

$$\log (\Delta x - (\delta x)) = 3,6945322$$

$$, (\Delta y - (\delta y)) = 3,6946341$$

$$\log \quad tg(\varphi_1) \quad = 9,9998981$$

$$(\varphi_1) \quad = 44^\circ 59' 35''.8$$

$$\log (\Delta x - (\delta x)) = 3,6945322 \quad \log (\Delta y - (\delta y)) = 3,6946341$$

$$, \sin(\varphi_1) \quad = 9,8494341 \quad , \cos(\varphi_1) \quad = 3,8495359$$

$$\log \quad s \quad = 3,8450981 \quad \log \quad s \quad = 3,8450982,$$

demnach wieder wie oben $s = 7000,00 \text{ m}$. Das ist eine rechnerische Bestätigung der Transformationsformeln (7). Die Differenzen der Direktionswinkel sind dabei $\varphi_1 - (\varphi_1) = 24''.2$, was wieder mit dafür geltender Formel (Anmerkung S. 13)

$$\varphi - (\varphi) = \frac{\omega \cdot (a - a_0)}{R^2} o_0 \quad (25)$$

übereinstimmt.

Als numerisches Beispiel werde noch die Richtungsverzerrung aus den sphärischen Koordinaten abgeleitet, indem man dieselben als ebene betrachtet. Man hat zuerst mit $\Delta a = + 4950,19$ und $\Delta o = + 4949,73$

$$\log \Delta a \quad = 3,6946218$$

$$, \Delta o \quad = 3,6945815$$

$$\log tg(\varphi_1) = 0,0000403 \quad (\varphi_1) = 45^\circ 00' 09''.6$$

Oben hatte man $\varphi_1 = 45^\circ 00' 00''.0$, demnach $(\varphi_1) - \varphi_1 = 09''.6$ als Richtungsverzerrung, was für Triangulierung, selbst niedriger Ordnung, zu hoch ist. Die Richtungsverzerrung im lokalen Systeme ist, weil y_1 nahezu Null, gleichfalls Null.

15. Umformungsbeispiel II. Es sei noch ein erläuterndes Beispiel für die Massverhältnisse des bayerischen Messblattes NW. 104—34 gegeben. Die sphärischen Koordinaten (a vorangestellt) der 4 Blattecken sind:

NW.	NO.
+ 242 826,82	+ 242 826,82
+ 79 385,69	+ 77 050,82
SW.	SO.
+ 240 491,95	+ 240 491,95
+ 79 385,69	+ 77 050,82

Diese 4 Blattecken werden in transformirten Koordinaten x und y im System III mit $a_0 = + 180$ km, $o_0 = + 80$ km:

NW.	NO.
+ 62 821,97	+ 62 822,26
— 610,44	— 2 945,31
SW.	SO.
+ 60 487,28	+ 60 487,56
— 610,72	— 2 945,59

Die arithmetischen Mittel aus den Koordinaten der entsprechenden Blattecken geben die Mittelwerte der Blattseiten in transformirten Koordinaten:

Blatt- seiten.	nördlich.	südlich.	westlich.	östlich.
$x =$	+ 62 822,11.	+ 60 487,42.	$y =$	— 610,58. — 2 945,45.

Die Vergleichung dieser Mittelwerte mit den Koordinaten der einzelnen Blattecken ergibt die Abweichungen ± 14 cm, entsprechend der Gl. (10). Auf natürliches Mass zurückgebracht, sind 14 cm des 5000-t. Massstabes, welcher den vorigen Ableitungen zu Grunde liegt, nur 0,02₈ mm; folglich fällt diese Abweichung,¹⁾ da 0,05 mm die äusserste geometrische Merkbar-

¹⁾ Diese Vernachlässigungen treffen nur die vereinzelte Verwendung im älteren (lithographirten) Landesvermessungsblatt, während die Neukartirungen sich selbstverständlich mit geometrischer Strenge vollziehen.

keitsgrenze, für jede Kartirung ausser Betracht, so dass diese transformirten Koordinaten für Planarbeiten in den Blättern des allgemeinen Systems unmittelbar verwendbar sind. Zur Bestätigung liefert die Gl. (10) noch, wobei $l = 467$ mm die Seitenlänge des bayerischen Messblattes und $\Delta a = 61$ km,

$$\log l = 9,66932$$

$$,, \Delta a = 4,78533$$

$$,, k = 0,99131$$

$$\log c_e = 5,44596$$

den Wert $c_e = 0,02_8$ mm wie oben.

16. Blattseitenlängen. Die Ableitung der Blattseitenlängen aus den gegebenen allgemeinen, dann aus den obigen transformirten Koordinaten gibt weiter

$$\text{in der Abszissenrichtung: } 2334,87; \quad 2334,69,$$

$$,, \quad \text{Ordinatenrichtung: } 2334,87; \quad 2334,87.$$

Folglich wurde die Blatthöhe in transformirten Koordinaten um 18 cm verkürzt, während die Blattlänge unverändert blieb. Es ist nun aber die Blatthöhenverkürzung (v_h) eines Blattes in transformirten Koordinaten (die ja gleichfalls sphärische sind), entsprechend der Gl. (3)

$$(v_h) = \frac{l \cdot y^2}{2 R^2} = \frac{l \cdot (o - o_0)^2}{2 R^2} \quad (26)$$

wenn hinreichend $y = (o - o_0)$ gesetzt wird. Die in den transformirten Koordinaten zur Erscheinung tretende Blatthöhenverkürzung Δ ist somit, was schon in Gl. (12) gefunden wurde,

$$\Delta = v_h - (v_h) = \frac{l}{2 R^2} (o^2 - (o - o_0)^2) = \frac{l \cdot (2 o - o_0) o_0}{2 R^2} \quad (27)$$

Die Auswertung gibt mit $(2 o - o_0) = 78$ km

$$\log l M = 3,36827$$

$$,, (2 o - o_0) = 4,89209$$

$$,, k = 0,99131$$

$$\log \Delta = 9,25167$$

oder $\Delta = 18$ cm, wie oben aus $2334,87 - 2334,69 = 0,18$ m.

Die vorstehenden numerischen Auswertungen bestätigen in allen Einzelheiten die vorausgegangenen theoretischen Ableitungen und der daraus gezogenen Folgerungen, dass nämlich durch die transformirten Koordinaten, diese in bestimmter Ausdehnung als ebene behandelt, die wesentlichsten sphärischen Beziehungen in die Koordinaten verlegt werden und dass gleichzeitig letztere eine unmittelbare Verwendung in den Messblättern der allgemeinen (sphärischen) Koordinirung innerhalb geometrisch verschwindender Grenzen zulassen.

17. Ueberführung der Blattecken-Koordinaten. Ueber die Transformation der Koordinaten der Blattecken sei noch kurz Folgendes bemerkt. Ist das Blattsystem einheitlich für das ganze Land, wie z. B. in Bayern, Württemberg, Meiningen und Coburg, so werden die Blätter, abgesehen von der Region NW., NO., SO., SW., durch von der Direktionsachse aus zählende Schichtennummern N und von der Vermessungsachse aus gezählte Reihenummern n bezeichnet. Ist demnach $l \cdot M = L$ die konstante (quadratische) Blattlänge, so sind die Abszissen der Blätter durch NL , die Ordinaten durch nL gegeben, wobei für die den beiden Hauptachsen anliegenden Blattränder N , bzw. n gleich Null sind. Sonach lassen die Differentialglieder der Transformationsformeln (7), bzw. (23) sich schreiben

$$\begin{aligned}\delta &= -q(NL - a_0) \left(nL - \frac{o_0}{2} \right) \\ \delta' &= k(NL - a_0)^2,\end{aligned}$$

Für die Schichten der Reihe n ist $q \left(nL - \frac{o_0}{2} \right)$ bei δ eine Konstante und ebenso δ' selbst für jeden Ordinatenkreis NL , die mit K_n , bzw. K_N bezeichnet werden sollen. Man hat demnach für sämtliche sphärische Parallelen zur ursprünglichen Vermessungsachse, dann für sämtliche Ordinatenkreise

$$\left. \begin{aligned}\delta_N &= -K_n(NL - a_0) \\ \delta'_n &= K_N\end{aligned} \right\} \quad (28)$$

wobei noch zu bemerken, dass die δ für jedes um 1 zunehmende N einfach um $L K_n$ wachsen. Somit können die transformirten Koordinaten der Ecken sämtlicher in ein besonderes Kleinsystem fallenden älteren Blätter leicht in eine Tabelle gebracht werden, die einmal nach den Reihen n , dann nach den Schichten N zu ordnen ist. Für jenes System, dessen Nullpunkt mit dem der Landesvermessung, bzw. der allgemeinen Blatteinteilung zusammenfällt, sind die Gl. (28) streng, für die anderen Systeme blos genähert, doch reichen sie für die überhaupt zulässigen Ausdehnungsgrenzen jener Systeme aus, den Centimeter sicher zu geben.

IV. Lokale Systeme rechtwinklig-konformer Koordinaten.

18. Projektionsverzerrungen II. Die Gl. (17) und Fig. 1 (S. 16 und 34) liessen die ungleichmässige Linearverzerrung in den Soldner'schen Koordinaten vermöge der Beziehung

$$v = \frac{\sin^2 \varphi}{6 R^2} (o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2)$$

erkennen, die wieder einen verwickelteren Ausdruck

$$v' = \frac{a_2 - a_1}{6 R^2} (2 o_1 + o_2) + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{6 R^2} (o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2)$$

der Richtungsverzerrung bedingt. Man kann sich nun eine Projektion denken, welche eine von der Richtung φ unabhängige, also gleichmässig differentielle Linearverzerrung

$$V = \frac{1}{6 R^2} (o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2)$$

liefern soll. Dieselbe wird offenbar erhalten durch den Ausdruck

$$v + \frac{\cos^2 \varphi}{6 R^2} (o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2) = V$$

Wird hier das zweite Glied, nachdem es zuvor mit s multiplicirt worden, als eine auf der Richtung $P_1 P_2$ liegende Lineargrösse mit $\frac{1}{\cos \varphi}$ auf die Ordinatenrichtung reduzirt (Fig. 1), so folgt dafür

$$\frac{n}{6 R^2} (o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2) = \frac{o_2 - o_1}{6 R^2} (o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2)$$

wo hinreichend genau $n = o_2 - o_1$ eingeführt wurde. Die Ausrechnung gibt für letzteren Ausdruck $\frac{o_2^3 - o_1^3}{6 R^2}$, so dass nun die Gl. (A) auf Seite 34 lautet:

$$\begin{aligned} S = s(1 + V) &= s \left(1 + \frac{(\delta a) \sin \varphi + (\delta o) \cos \varphi}{s} + \frac{(o_2^3 - o_1^3)}{6 R^2 \cdot s} \cos \varphi \right) \\ &= s \left(1 + \frac{(o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2)}{6 R^2} \right) \end{aligned} \quad (20^*)$$

Dementsprechend ist für die Gl. (A') der Richtungsverzerrung (S. 35) hier zu setzen (indem $\frac{o_2^3 - o_1^3}{6 R^2}$ mit $\frac{\sin \varphi}{s}$ auf die Querrichtung projicirt wird),

$$\varphi'' - \varphi = V' = \frac{(\delta a) \cos \varphi - (\delta o) \sin \varphi}{s} - \frac{(o_2^3 - o_1^3)}{6 R^2 \cdot s} \sin \varphi \quad (a)$$

Es ist aber $s = \frac{n}{\cos \varphi}$ oder genähert $\frac{o_2 - o_1}{\cos \varphi}$, so dass für das letzte Glied erhalten wird

$$\delta v' = - \frac{\sin \varphi \cos \varphi (o_2^3 - o_1^3)}{6 R^2 (o_2 - o_1)} = - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{6 R^2} (o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2)$$

Das erste Glied des obigen Ausdrucks (a), d. h. die Gl. (e) S. 36 für die Soldner'sche Projektion war nun

$$v' = \frac{a_2 - a_1}{6 R^2} (2 o_1 + o_2) + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{6 R^2} (o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2),$$

so dass die Hinzufügung des vorigen $\delta v'$ zufolge Aufhebung von $+$ und $-$ gibt

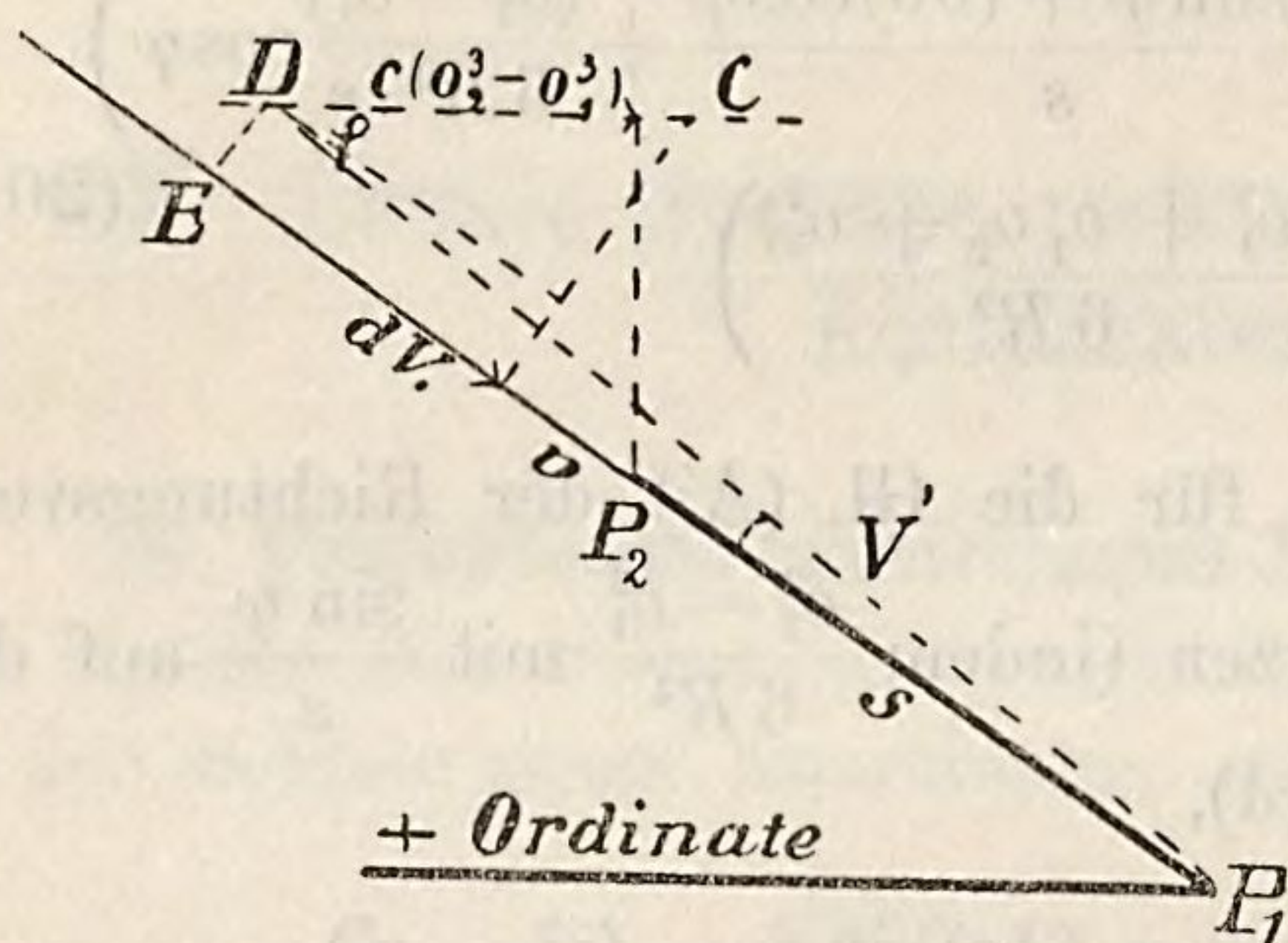
$$\varphi'' - \varphi = v' + \delta v' = V' = \frac{a_2 - a_1}{6 R^2} (2 o_1 + o_2) \quad (20^{**})$$

Man kann dies, wie in Fig. 1 für die rechtwinklig-sphärischen Koordinaten geschehen, auch hier graphisch darstellen, indem man $\frac{o_2^3 - o_1^3}{6 R^2} = CD$ von C aus in der Ordinatenrichtung

aufträgt. Es ist sofort ersichtlich, dass hier die lineare Verzerrung $P_2 E = V$ gleichmässiger, jedoch grösser geworden ist, während die Verzerrung der Richtung $E D = V'$ erheblich abge-

nommen hat und überhaupt in engeren Grenzen sich bewegt.

Fig. 2.



Den Ausgangspunkt der vorstehenden Betrachtungen und derjenigen in Nr. 10 hinsichtlich der Verzerrungsgrössen bildeten die Soldnerschen Gleichungen

$$a_2 - a_1 = m + (\delta a); \quad o_2 - o_1 = n + (\delta o) \quad (f)$$

Während die erste unverändert geblieben, ist die zweite hier übergegangen in

$$(o_2 - o_1) + \left(\frac{o_2^3 - o_1^3}{6 R^2} \right) = n + (\delta o) + \left(\frac{o_2^3 - o_1^3}{6 R^2} \right)$$

Es lässt sich aber die linke Seite schreiben

$$o_2 \left(1 + \frac{o_2^2}{6 R^2} \right) - o_1 \left(1 + \frac{o_1^2}{6 R^2} \right)$$

woraus sich mit Beachtung der ersten der Gl. (f) die allgemeinen Beziehungen der neuen rechtwinkligen Koordinaten ableiten zu

$$\xi = a$$

$$\eta = o \left(1 + \frac{o^2}{6 R^2} \right)$$

19. Umformungsbeispiel III. Die technischen Beziehungen dieser Koordinaten sind ähnlich jenen der in Abschnitt III behandelten der Soldner'schen Kongruenz, weshalb die hier zu gebenden Beispiele an die früheren anknüpfen. Da die konform geringere Richtungsverzerrung insbesondere hinsichtlich der Triangulirung eine grössere Querausdehnung gestattet,

können die System-Nullpunkte hier andere als die in der Beilage gegebenen für Soldner'sche Systeme sein. Es sind also zwei Systeme angenommen: A mit $a_0 = 0$ und $o_0 = 0$, d. h. der allgemeine Koordinaten - Nullpunkt, und B mit $a_0 = + 180$ km, $o_0 = + 130$ km. Zur Transformation nach den Gl. (22) wird wieder eine Tabelle ähnlich der im Anhang gegebenen benützt, der noch eine Spalte für $\frac{(\Delta o)^3}{6 R^2} = \delta_c$ angefügt ist. Diese Werte sowie die $k(\Delta a)^2$ müssen nunmehr in Millimeter gegeben sein, wenn man (δ') auf den Centimeter rechnerisch sicher haben will. Im Systeme B sind

$$\log q_{+130} = 1,50\,319 \quad \log k_{+130} = 1,20\,216$$

und allgemein ist

$$\log \frac{1}{2R^2} = 6,0\,8822 \quad \log \frac{1}{6R^2} = 5,6\,1110$$

Es sind wieder gegeben die Koordinaten der Punkte P_1, P_2 mit

$$\begin{array}{ll} a_1 = + 240\,000,00 & o_1 = + 80\,000,00 \\ a_2 = + 244\,950,19 & o_2 = + 84\,949,73 \end{array}$$

System A. Da hier a_0 und o_0 gleich Null, so sind die Werte a, o sofort auch die Unterschiede $\Delta a, \Delta o$; ferner ist in den Gl. (22) $(\delta) = 0$ und das erste Glied von (δ') gleichfalls Null. Hiermit geht (δ') zurück auf $\frac{(\Delta o)^3}{6 R^2}$, dessen Auswertung $+ 2,09$, bzw. $+ 2,50$ gibt. Durch Hinzufügung dieser Werte zu den obigen Δo erhält man die η . Es sind demnach die transformierten Koordinaten:

$$\begin{array}{ll} \xi_1 = + 240\,000,00; & \eta_1 = + 80\,002,09; \\ \xi_2 = + 244\,950,19; & \eta_2 = + 84\,952,23. \end{array}$$

System B. $a_0 = + 180$ km; $o_0 = + 130$ km. Zunächst wird

$$\begin{array}{ll} \Delta a_1 = + 60\,000,00 & \Delta o_1 = - 50\,000,00 \\ (\delta)_1 = - 287 & \delta'_1 = + 573_4 \\ \hline \xi_1 = + 59\,997,13 & \delta'_{c1} = - 51_0 \\ \hline & \eta_1 = - 49\,994,77_6 \end{array}$$

4*

$\Delta a_2 = + 64\,950,19$	$\Delta o_2 = - 45\,050,27$
$(\delta)_2 = - 413$	$\delta'_2 = + 671,9$
	$\delta'_{c2} = - 37,3$
$\xi_2 = + 64\,946,06$	$\eta_2 = - 45\,043,92_4$

(Die Millimeter in den η sind hier nur wegen den nachfolgenden Vergleichen belassen worden.)

Für die Ableitung der Polarkoordinaten in beiden Systemen hat man:

A. $\Delta \xi = + 4\,950,19$	B. $\Delta \xi = + 4\,948,93$
$\Delta \eta = + 4\,950,14$	$\Delta \eta = + 4\,950,85_2$

demnach

3,694 6218	3,694 5113
3,694 6175	3,694 6800
0,000 0043	9,999 8313
$\psi_1 = 45^\circ 00' 01''.0$	$(\psi_1) = 44^\circ 59' 19''.9$

Oben (S. 43) war die Entfernung $1 - 2 = s$ zu 7 km ($\log s = 3,845\,0980$) und der Direktionswinkel zu 45° abgeleitet worden. Diese Entfernung s wäre in dem Soldner'schen Lokalsysteme B selbstverständlich dieselbe, während sich der Direktionswinkel infolge der veränderten Achsenlage entsprechend der Gl. (25) verkleinert. Die Auswertung gibt $\delta \varphi = - 39,4$. Sonach hat man

A. $\varphi_1 = 45^\circ 00' 00''.0$	B. $\varphi_1 = 44^\circ 59' 20''.6$
$\psi_1 = 45\ 00\ 01''.0$	$(\psi_1) = 44\ 59\ 19''.9$
$V' = + 01''.0$	$V' = - 0''.7$

Die Rechnung für S gibt

$\Delta \xi, \Delta \eta:$	A. 3,694 6218	3,694 6175	B. 3,694 5113	3,694 6800
sin, cos:	9,849 4881	9,849 4839	9,849 4007	9,849 5694
log S :	3,845 1337	3,845 1338	3,845 1106	3,845 1106
S :	7000,58		7000,20	
d/S :	1 : 12 000		1 : 35 000	

Beide Verzerrungsgrößen zeigen insbesondere den Vorteil von V' in der Konformität, indem vorher für Soldner 9"6 gefunden worden war, dagegen den des v in der Kongruenz, für welche die Werte (rund) nach den Gl. (17) 1 : 24 000 und 1 : 71 000 wären. Entscheidend für die moderne Vermessung, besonders hinsichtlich der Triangulierung, ist indess das erstere.

20. Umformungsbeispiel IV. Es werde noch das Messblatt NW. 104—34 in konformen Koordinaten der Systeme A und B behandelt, dessen Soldner'sche Koordinaten auf S. 44 gegeben sind. Man hat für die ξ und η

	NW.	NO.	SW.	SO.
A. $a=\xi=$	+ 242 826,82	+ 242 826,82	+ 240 491,95	+ 240 491,95
	$o=$ + 79 385,69	+ 77 050,82	+ 79 385,69	+ 77 050,82
	+ 2,04	+ 1,87	+ 2,04	+ 1,87
	$\eta=$ + 79 387,73	+ 77 052,69	+ 79 387,73	+ 77 052,69
B. $\Delta a=$	+ 62 826,82	+ 62 826,82	+ 60 491,95	+ 60 491,95
$(\delta)=$	— 2,88	— 2,41	— 2,77	— 2,32
	$x=\xi=$ + 62 823,94	+ 62 824,41	+ 60 489,18	+ 60 489,63
	$\Delta o=$ — 50 614,31	— 52 949,18	— 50 614,31	— 52 949,18
	+ 6 28 ₇	+ 6 28 ₇	+ 5 82 ₉	+ 5 82 ₉
$(\delta')=$	— 53 ₀	— 60 ₆	— 53 ₀	— 60 ₆
	$\eta=$ — 50 608,55	— 52 943,50	— 50 609,01	— 52 943,96

Die Mittel aus den entsprechenden Blattecken-Koordinaten geben wieder die Mittelwerte der Blattseiten in (transformirten) konformen Koordinaten:

B. Blatt- seiten:	nördlich.	südlich.	westlich.	östlich.
$\xi:$	+ 62 824,17	+ 60 849,40	$\eta:$ — 50 608,78	— 52 943,73

Die Abweichungen der Blattecken sind hier, da o_0 von 80 auf 130 km gegangen ist, auf ± 23 cm, also in natürlichem Masse 0,046 gestiegen, was immerhin noch unter der äussersten Kartirungsgrenze 0,050 liegt. Zur Bestätigung liefert die (Gl. 10) mit $l = 467$ mm und $\Delta = 61$ km

$$\begin{array}{r} \log l = 9,6693 \\ \text{„ } \Delta a = 4,7924 \\ \text{„ } k = 1,2022 \\ \hline \log c_e = 5,6639 \end{array}$$

den Wert $c_e = 0,046$ mm. Die unmittelbare Verwendung der neuen Koordinaten in den allgemeinen Landesvermessungsblättern ist demnach auch hier noch zulässig.

21. Blattseitenlängen. Die Längen der Blattseiten ergeben sich aus den obigen Koordinaten wie folgt:

In der Abszissenrichtung System A: 2334,87 System B: 2334,77
 „ „ Ordinatenrichtung „ „ : 2335,04 „ „ : 2334,95

In A hat das Blatt die normale (unverkürzte) Blatthöhe 2334,87 behalten; es würde v_h hier nur 18 cm (oder 0,036 mm) betragen haben und folglich ausser Betracht geblieben sein. Dagegen hat sich die normale Blattlänge in demselben Verhältnisse, d. h. um 17 cm (0,034 mm) infolge der Konformität vergrößert, was geometrisch wieder nicht darstellbar ist. (Die letztere Vergrößerung folgt aus $\frac{\eta_2^3 - \eta_1^3}{6R^2} = \frac{\eta_1^2 l + \eta_1 l^2}{2R^2} + \frac{l^3}{6R^2}$, wobei das letzte Glied infolge der geringen Grösse von l verschwindet.)

In B hat sich die Höhe desselben Blattes um 10 cm (0,02 mm) verringert, die Länge um 8 cm (0,016 mm) vergrößert. Das Letztere stimmt somit genau mit dem aus den Vorigen folgenden $18 - 10 = 8$ cm. Die Auswertung der Gl. (27) gibt für jene Verringerung mit $(2o - o_0) = 158 - 130 = 28$ km

$$\begin{array}{r} \log l M = 3,3684 \\ \text{„ } (2o - o_0) = 4,4472 \\ \text{„ } k = 1,2022 \\ \hline \log \Delta = 9,0178, \end{array}$$

also $\Delta = 0,10$ m, sodann folgt aus $\frac{\eta_2^3 - \eta_1^3}{6R^2}$ die Verlängerung der Blattlänge zu 0,08 m.

Die Schlussergebnisse dieser numerischen Auswertungen bestätigen wieder in allen Fällen wie schon vorher für die lokalen Systeme Soldner'scher transformirter Koordinaten die früheren theoretischen Aufstellungen.

22. Ueberführung der Blattecken-Koordinaten. Hinsichtlich der Herstellung der neuen (konformen) Koordinaten der Ecken sämtlicher (älterer) Landesvermessungsblätter erleiden nur die Gl. (28) eine geringe Veränderung; die Hinzufügungen zu den Landesvermessungskordinaten NL , bzw. nL der Blattecken schreiben sich, wie leicht zu sehen, nunmehr

$$\left. \begin{aligned} (\delta_N) &= -(NL - a_0) K_n \\ (\delta_n) &= K_n + \frac{(nL - o_0)^3}{6R^2} \end{aligned} \right\} \quad (28a)$$

was alles wieder tabellarisch zu machen ist.

Erweiterungen und Zusätze.

23. Achsenkonvergenz. Die in der Anmerkung S. 13 und dann in Gl. (25) aufgestellte Formel hat für die gewählte Transformationsart, dann auch für die trigonometrische Vermessung in den lokalen Systemen eine grosse Bedeutung. Sie stellt nicht nur den Konvergenzwinkel dar, den die neue Abszissenachse mit den Parallelen zur ursprünglichen Achse, also mit den Blatträndern macht, sie drückt auch jenen Betrag aus, der die auf einem Standpunkte abgeleiteten lokalen Direktionswinkel in solche des allgemeinen Systems überführt. Man hat im letzteren nach der dritten der Gl. (1) für eine Richtung vom lokalen Koordinatennullpunkte $(a_0 \ o_0)$ nach einem Punkte $(a_1 \ o_1)$

$$\varphi - \varphi_1 = 180 + \frac{(a_1 - a_0)}{R^2} \left(o_0 + \frac{o_1 - o_0}{2} \right) \quad (g)$$

und im lokalen Systeme

$$(\varphi) - \varphi_1 = 180 + \frac{x}{R^2} \cdot \frac{y}{2} = 180 + \frac{(a_1 - a_0)}{R^2} \cdot \frac{(o_1 - o_0)}{2}, \quad (h)$$

demnach durch Subtraktion

$$(\varphi) - \varphi = - \frac{\Delta a}{R^2} \cdot o_0 \quad (i)$$

Der erste dieser Ausdrücke (g) ist die Konvergenz: „Allgemeiner Ordinatenkreis im Nullpunkte $(a_0 \ o_0)$, d. h. neue Hauptachse“ minus „allgemeiner Ordinatenkreis im Punkte $(a_1 \ o_1)$ “, der zweite (h) die Konvergenz: „Neue Hauptachse $(a_0 \ o_0)$ “ minus „lokaler Ordinatenkreis im Punkte $(a_1 \ o_1) = (x \ y)$ “, wonach der Ausdruck (i) die Differenz „allgemeiner Ordinatenkreis im Punkte $(a_1 \ o_1)$ “ minus „lokaler Ordinatenkreis im Punkte $(a_1 \ o_1) = (x \ y)$ “ darstellt. Wird in (g) $o_1 = o_0$ gesetzt,

so hat φ die sphärische Parallelrichtung zur ursprünglichen Vermessungsachse, d. h. definitionsgemäss die Richtung der Blattseiten, wobei $\varphi - \varphi_1$ in $180 + \frac{\Delta a}{R^2} o^0$, wie vor (i) übergeht. Bei derselben Voraussetzung wird aber $(\varphi) - \varphi_1$ in (h) zu 180^0 , so dass aus der Subtraktion (h) — (g) wie in (i) der Wert $(\varphi) - \varphi = -\frac{\Delta a}{R^2} o_0$ folgt. Dies gibt für $o_0 = 80$ und $\Delta a = 102$, dann $o_0 = 160$ und 51 km, in Sekunden ausgedrückt mit $\log \frac{\omega}{R^2} = 1,70367$ die übereinstimmenden Werte $(\varphi) - \varphi = -40''.4$. Diese Auswertungen stimmen mit den weiter vorn gegebenen überein und zeigen wie dort, dass die Konvergenz der neuen Achsenrichtungen mit den Blattseiten-Richtungen der Landesvermessungsblätter für bestimmte Grenzwerte von Δa und l geometrisch belanglos werden kann.

Die Gl. (25), bzw. (i) hat noch die weitere technische Bedeutung, dass lokale Direktionswinkel (φ) eines Standpunktes $(x y)$, bzw. $(a o)$ mit

$$\varphi = (\varphi) + \frac{\Delta a}{R^2} o_0 \quad (\text{i i})$$

vorkommenden Falles in solche φ des allgemeinen Systems übergeführt werden können. Das wird z. B. gegeben sein, wenn aus irgend welchen Gründen die lokalen Koordinaten $(x y)$ eines Punktes wieder in allgemeine (a, o) mittels der Gl. (8) überzuführen wären und zugleich die Kenntniss der allgemeinen Direktionswinkel der auf jenem Punkte abgeleiteten (lokalen) Richtungen notwendig würde, ohne hierbei zu einer Zurücktransformierung der lokalen Koordinaten der gegebenen Richtpunkte und zu neuen Richtungsableitungen schreiten zu müssen.

24. Sphärische Koordinatenformeln. Die Koordinatenformeln (y) auf Seite 24 werden in der Regel wenig zur Verwendung gelangen, so lange es sich nur um Einschaltungen III. und IV. Ordnung in ein konformes Netz handelt; denn es ist

ja der ausgesprochene Zweck der hier vorgeschlagenen lokalen Systeme, die durchgängig ebene Rechnung zu ermöglichen. Jene Formeln wurden daher nur der Vollständigkeit halber sowie zur Benützung in Einzelfällen hier aufgeführt, und zwar, wie schon bemerkt, in einer Gestalt, welche die Benützung sphärischer Seiten und der für Soldner'sche Rechnung bereits vorliegenden Diagramme gestattet. Die Herleitung ist so einfach, dass sie bloß angeschrieben zu werden braucht; nur zu der Formel für η seien einige Worte bemerkt. Nach den (19) hat man

$$\eta_2 = y_2 + \frac{y_2^3}{6R^2}; \quad \eta_1 = y_1 + \frac{y_1^3}{6R^2}.$$

Es ist aber $y_2 = y_1 + n + \delta o$, folglich

$$\eta_2 = (y_1 + n + \delta o) + \frac{(y_1 + n + \delta o)^3}{6R^2}$$

Die Einsetzung von $y_1 = \eta_1 - \frac{y_1^3}{6R^2}$ hierin gibt bei Vernachlässigung des Gliedes zweiter Ordnung δo im letzten, durch $6R^2$ dividiertem Gliede

$$\eta_2 = (\eta_1 + n + \delta o) + \frac{n}{2R^2} \left(\eta_1^2 + \eta_1 n + \frac{n^2}{3} \right)$$

und da $\frac{n^2}{3} = \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{12}$, ebenso $\left(\eta_1^2 + \eta_1 n + \frac{n^2}{4} \right) = \left(\eta_1 + \frac{n}{2} \right)^2$ ist, so hat man unter Mitnahme des bekannten Ausdruckes für δo

$$\eta_2 = \eta_1 + n + \frac{n}{2R^2} \left(\eta_1 + \frac{n}{2} \right)^2 - \frac{n^2}{2R^2} \left(\eta_1 + \frac{n}{3} \right) + \frac{n^3}{24R^2},$$

also die zweite der Gl. (y). Diese sind zwar bloß Näherungsausdrücke, jedoch für $\eta < 200$ km ausreichend.

Es seien hierzu noch einige Zahlenrechnungen gegeben, als erste das Beispiel S. (51) hinsichtlich der beiden Punkte P_1 und P_2 .

Mit den dort angeführten Werten hat man folgende Rechnung, bei der die Ergänzungen (δ) der Gl. (y) bezüglich der Diagrammen entnommen sind.

$$\begin{array}{rcl}
 \xi_1 = +240\,000,00 & \eta_1 = +80\,002,09 & (\varphi_1) + 180 = 225\,00\,00,0 \\
 m = +4\,949,75 & n = +4\,949,75 & (\delta_{(\varphi)}) = +02,1 \\
 (\delta\xi) = +44_2 & (\delta\eta) = \left. \begin{array}{l} +41_9 \\ -2_5 \end{array} \right\} & (\varphi_2) = 225\,00\,02,1 \\
 \hline
 \xi_2 = +244\,950,19 & \eta_2 = +84\,952,23 &
 \end{array}$$

Für die Ableitung der Polarkoordinaten (in erster Näherung) findet sich nach den Gl. (2) in ähnlicher Weise für den Punkt P_2 :

$$\begin{array}{rcl}
 \Delta\xi = -4\,950,19 & \Delta\eta = -4\,950,14 & \\
 -(\delta\xi) = +39_2 & -(\delta\eta) = \left. \begin{array}{l} +41_9 \\ +2_6 \end{array} \right\} & \\
 \hline
 m = -4\,949,80 & n = -4\,949,70 & \\
 \log m = 3,694\,5877n & 3,694\,5877n & 3,694\,5789n \\
 „\, n = 3,694\,5789n & 9,849\,4897n & 9,849\,4808n \\
 \hline
 \operatorname{tg}(\varphi_2) = 0,000\,0088 & \log s = 3,845\,0980 & \log s = 3,845\,0981 \\
 (\psi_2) = 225\,00\,02,1 & &
 \end{array}$$

Die weiteren Beispiele beziehen sich auf die bayerische Vermessung, wobei die gegebenen Zahlen dem Werke: „Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, München 1873“ entnommen sind. Hierzu ist eine Vorbemerkung nötig. Die trigonometrischen Rechnungen sind dort mit 7-stelligen Logarithmen geführt. Es erschien dies insofern zulässig, als die Rechnungsgrenze der bayerische Zoll (nahezu 3 cm) bildete und die grösste Dreiecksseite 3 Millionen Zoll kaum überschreitet. Selbstverständlich kann die hier vorgenommene Ueberführung in Meter mit dem Centimeter als Rechnungsgrenze letzteren nicht mit Sicherheit geben, vielmehr sind Abweichungen von 1—2 cm möglich. Aus demselben Grunde konnte hier nicht auf Millimeter, sondern nur auf Centimeter gerechnet werden. Da es sich blos um ein Rechnungsbeispiel handelt, so mag der Centimeter für diesen Zweck genügen. Die den Seiten 501, 505 und 506 genannten Werkes entnommenen Zahlenwerte sind zunächst in Meter übergeführt worden; die unmittelbar gegebenen Koordinaten sind Soldner'sche.

1. Hoheleite (bei Ansbach).

$$x_1 = \xi_1 = +144\,743,58 \quad y_1 = +94\,886,97 \quad (\varphi_1) = 4^\circ 10' 42'' 34$$

$$\quad \quad \quad + 3,49$$

$$\quad \quad \quad \hline \eta_1 = +94\,890,46 \quad \log s = 4,948\,4019_3$$

2. Katzenbuckel (im badischen Odenwald).

$$x_2 = \xi_2 = +151\,216,08 \quad y_2 = +183\,448,63 \quad (\varphi_2) = 184^\circ 10' 46'' 89$$

$$\quad \quad \quad + 25\,22$$

$$\quad \quad \quad \hline \eta_2 = +183\,473,85$$

Rechnung nach den Gl. (y) mit Benützung von Diagrammen:

$$\begin{array}{rclcl} \xi_1 = +144\,743,58 & \eta_1 = +94\,890,46 & (\varphi_1) + 180 = 184^\circ 10' 42'' 34 \\ m = +6\,470,04 & n = +88\,561,71 & (\delta\varphi) = +4,55 \\ & + 21\,02 & \hline & & (\varphi_2) = 184^\circ 10' 46'' 89 \\ (\delta\xi) = +246 & (\delta\eta) = -6 & \\ & + 71 & \\ \hline \xi_2 = +151\,216,08 & \eta_2 = +183\,473,84 & \end{array}$$

Die Abweichung von der direkten Ueberführung beträgt demnach nur 1 cm in der Ordinate, was nach dem oben bemerkten hier zulässig ist. Ein weiteres Beispiel bezieht sich auf den Koordinaten-Nullpunkt München und den Hauptnetzpunkt Benediktenwand.

1. München (nördl. Frauenthurm).

$$\xi_1 = 0 \quad \eta_1 = 0 \quad (\varphi_1) = 278^\circ 29' 45'' 71$$

$$\log s = 4,737\,0172_3$$

2. Benediktenwand.

$$x_2 = \xi_2 = +53\,979,03 \quad y_2 = +8\,063,31 \quad (\varphi_2) = 98^\circ 29' 44'' 61$$

$$\quad \quad \quad + 0,00$$

$$\quad \quad \quad \hline \eta_2 = +8\,063,31$$

Rechnung.

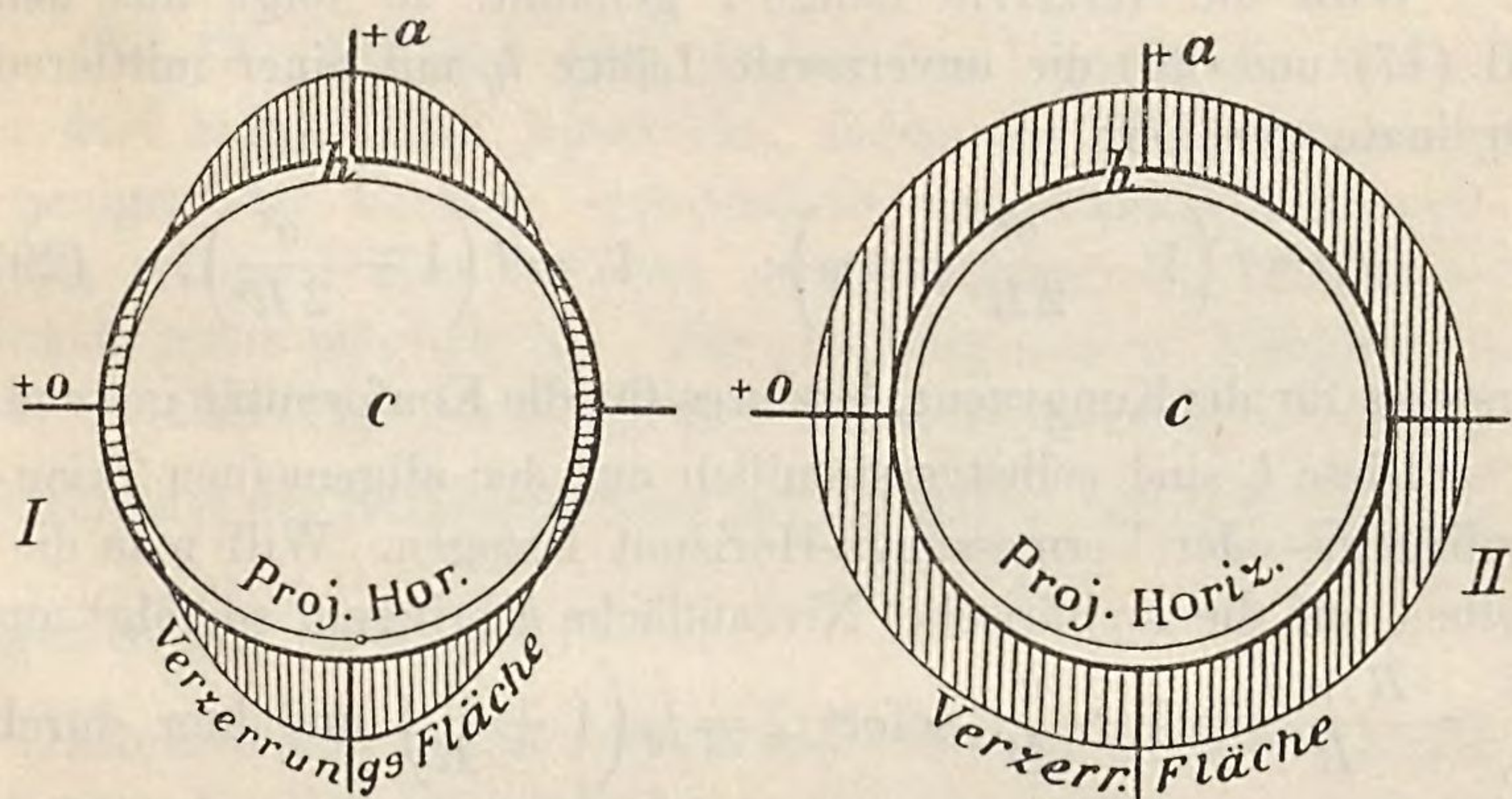
$$\begin{array}{rclcl} \xi_1 = 0,00 & \eta_1 = 0,00 & & & \\ m = -53\,979,01 & n = +8\,063,40 & (\varphi_1) + 180 = 98^\circ 29' 45'' 71 \\ (\delta\xi) = -3 & (\delta\eta) = -9 & (\delta\varphi) = -1,10 \\ \hline \xi_2 = -53\,979,04 & \eta_2 = +8\,063,31 & (\varphi_2) = 98^\circ 29' 44'' 61 \end{array}$$

Die Abweichung von 1 cm in ξ erscheint hier wieder zulässig.

25. Darstellung der linearen Verzerrungen. Es hat Interesse, einige der wesentlichsten Beziehungen der beiden Projektionsmethoden, soweit sie für die technische Ausführung Bedeutung haben, geometrisch zu veranschaulichen. In den Figuren 1 und 2 (S. 34 u. 50) ist dies für die Richtungsverzerrungen in beiden Systemen und gleichzeitig für einen besonderen Wert der kongruenten sowie den allgemeinen Wert der konformen Linearverzerrung geschehen. Obwohl die Verzerrungswerte unverhältnissmässig vergrößert erscheinen müssen, liess die Darstellung doch sofort die Vorzüge im Linearen bei Soldner und die der Richtung bei Gauss erkennen. Es ist leicht, aus weiteren ähnlichen Konstruktionen die bezüglichen Verhältnisse für andere Hauptrichtungen geometrisch zu veranschaulichen.

In den nachstehenden Figuren 3 sind die Flächenverzerrungen, links (I) Kongruenz, rechts (II) Konformität, dargestellt.

Fig. 3.



Infolge des notwendigen grossen Massstabes erscheint die kongruente Flächenverzerrung gegenüber der konformen noch günstiger, als sie thatsächlich schon ist (durchschnittlich $\frac{1}{2}$ von dieser). Indess hat im Planbilde die Konformität den grösseren systematischen Vorteil für sich. In der Figur stellen die inneren Kreise die unverzerrten Flächen auf dem Projektions-Horizonte der Landesvermessung dar, die mittleren starken

Kreislinien die Flächen im wirklichen Messungsgelände der durchschnittlichen Höhe h über jenem Horizont (hier h positiv gedacht), und die äusseren Kurven die Verzerrung infolge der zunehmenden Ordinatengrösse o .

Die kongruente, durchaus ungleichmässige Linearverzerrung — Null in der Ordinate, Maximum in der Abszisse — verhindert eine einfache und angemessene Berücksichtigung der durch die Netzlage und durch die Höhe h veranlassten Verzerrungen, denn was in der einen Richtung gewonnen würde, ginge in der anderen wieder verloren. (Das plus gegenüber den wahren, auf h bezogenen Längen ist durch vertikale, das entsprechende minus durch horizontale Schraffirung angedeutet). Wohl ist aber jene etwaige Berücksichtigung, wie längst bekannt, in der Konformität möglich, da die Netzlage- und Höhenverzerrungen gleichmässig sind, wobei die letztere noch der ersteren (bei positivem h) entgegenwirkt.

Wird die verzerrte Länge l genannt, so folgt aus den Gl. (17) und (20) die unverzerrte Länge l_0 mit einer mittleren Ordinate genähert zu

$$l_0 = l \left(1 - \frac{o^2}{2R^2} \sin^2 \varphi \right); \quad l'_0 = l \left(1 - \frac{o^2}{2R^2} \right), \quad (29)$$

ersteres für die Kongruenz, letzteres für die Konformität geltend.

Diese l_0 sind selbstverständlich auf den allgemeinen Triangulierungs- oder Vermessungs-Horizont bezogen. Will man dieselben auf die (sphärische) Niveaufläche h bringen, so folgt aus $\frac{\lambda}{l_0} = \frac{R+h}{R} = 1 + \frac{h}{R}$, sofort $\lambda = l_0 \left(1 + \frac{h}{R} \right)$ und hier durch Einsetzung von (29)

$$\lambda = l \left(1 + \frac{h}{R} - \frac{o^2}{2R^2} \sin^2 \varphi \right); \quad \lambda' = l \left(1 + \frac{h}{R} - \frac{o^2}{2R^2} \right)^{1)} \quad (30)$$

oder allgemeiner in Rücksicht auf die Systeme transformirter (lokaler) Koordinaten,

1) Für umgekehrte Verwertung hat man $l = \lambda' \left(1 - \frac{h}{R} + \frac{o^2}{2R^2} \right)$.

$$\lambda = l \left(1 + \frac{h}{R} - \frac{(\Delta o)^2}{2 R^2} \sin^2 \varphi \right); \quad \lambda' = l \left(1 + \frac{h}{R} - \frac{(\Delta o)^2}{2 R^2} \right) \quad (31)$$

da hier $y = \eta = o - o_0 = \Delta o$ gesetzt werden kann.

Dieser Ausdruck gestattet noch eine weitere technische Anwendung. Für eine zweite, zur ersten rechtwinklig stehende Länge l_1 findet man unter der hier zulässigen Annahme gleicher o zunächst in der Kongruenz sofort

$$\lambda_1 = l_1 \left(1 + \frac{h}{R} - \frac{(\Delta o)^2}{2 R^2} \cos^2 \varphi \right)$$

und daraus durch Multiplikation mit λ :

$$\lambda \lambda_1 = l l_1 \left(1 + \frac{2 h}{R} - \frac{(\Delta o)^2}{2 R^2} \right), \quad (31 a)$$

woraus für $\lambda = \lambda_1$ die allgemeinen Flächenwerte folgen

$$\lambda^2 = l^2 \left(1 + \frac{2 h}{R} - \frac{(\Delta o)^2}{2 R^2} \right); \quad \lambda'^2 = l^2 \left(1 + \frac{2 h}{R} - \frac{(\Delta o)^2}{R^2} \right) \quad (32)$$

Die Gl. (30) und (31) zeigen den Vorzug des zweiten der dort aufgestellten Ausdrücke, indem die Höhenverzerrung derjenigen der linearen systematisch und allseitig entgegenwirkt, während dies bei dem ersten infolge des Richtungswinkels nicht möglich ist. Für den allgemeinen Flächenwert (32) ist allerdings die Kongruenz insoferne günstiger, als hier der Einfluss der Netzverzerrung auf die Hälfte, nämlich auf $\frac{(\Delta o)^2}{2 R^2}$ gegen $\frac{(\Delta o)^2}{R}$, herabgeht.

Für $h = 500$ m, $o = 100$ km und $l = 1$ km, dann $l^2 = 1$ qkm hat man die Reduktionsglieder in (31) und (32):

$$78, \quad 0-123; \quad 78, \quad 123 \text{ mm}, \quad (31)$$

$$157, \quad 123; \quad 157, \quad 245 \text{ qm}, \quad (32)$$

woraus weitere Werte ableitbar sind. Es hängt lediglich von den Wertgrößen für h und o , bzw. Δo ab, wie hoch die Verzerrungen steigen. Schon oben ist festgestellt, dass die des Netzes bei Einhaltung von $\Delta o < 90$ km nicht über $\frac{1}{10000}$ hinausgeht.

Dieselbe Grenze erreicht jedoch das Glied $\frac{h}{R}$ schon für $h=600$ m, und man ersieht, dass für Landesgebiete grosser Höhenlage und wenn nicht gleichzeitig stärkere Linearverzerrung $\frac{(\Delta o)^2}{2 R^2}$ entgegenwirkt, der Einfluss von $\frac{h}{R}$ auf die Polygonisirung ein erheblicher sein kann. Ganz Aehnliches gilt für die Flächenverzerrung, jedoch ist hier hinsichtlich des Netzes (wegen durchschnittlich niedrigerem Betrage) die Kongruenz im Vortheile. Im Uebrigen gewähren die Gl. (32) sehr einfach die Möglichkeit, die mit ebenen Projektionskoordinaten gewonnenen Flächen von jedem Einflusse der Höhenlage und der Linearverzerrung zugleich zu befreien und jene auf theoretisch richtigere Werte zurückzuführen. In den Einzelflächen werden sich die Abweichungen zwar weniger fühlbar machen und nur systematisch von Bedeutung bleiben. Denn es ist im allgemeinen doch daran zu erinnern, dass z. B. für Bayern mit 75865 qkm und 400 m mittlerer Höhenlage eine Mehrung um $\frac{1}{8000}$ der Fläche, also um 95 qkm eintritt, wenn die Projektionsebene nicht das Meeresniveau, sondern der mittlere Landeshorizont gewesen wäre. Indessen ist das nur ein Durchschnitt. Der schon längst vorgeschlagene und in der Württembergischen Landesvermessung bereits durchgeführte Weg, das mittlere Landesniveau zum Projektionshorizont zu nehmen, verringert zwar die aus h entspringenden absoluten Fehler, doch wird der eine Teil ebenso +, als der andere —. Die strengere Lösung liegt eben nur in den Formeln (32).

Die vorstehenden Erörterungen sollen nicht gerade zu einer allgemeinen Berücksichtigung der Höhenverzerrungen in der Flächenermittelung auffordern, so einfach dies auch im technischen Vollzuge geschehen könnte, und zwar bei der Abstimmung der Einzelflächen auf die nach (32) zu-rechtgestellten Polygonmassen. Es sollte nur kurz in Erinnerung gebracht werden, zu welchem Einflusse diese

vernachlässigten und dabei meist unterschätzten Werte anwachsen können und dass in der Kongruenz die Ungleichmässigkeit der linearen Verzerrung das hauptsächlich störende Element ist. Obwohl daher die Konformität die durchschnittlich doppelte Linear-, bzw. Flächenverzerrung hat, ist doch zu erwägen, dass der ersteren nur hier die Höhenverzerrung systematisch und gleichmässig entgegenwirkt und weiter nur hier mit leichter Mühe, wenn man wollte, die Ergebnisse der Streckenmessung sich rationell behandeln liessen. Je nach der theoretischen und technischen Werteinschätzung jener Nachteile und dieser Vorzüge kann man dabei die Kongruenz oder die Konformität für die technischen Arbeiten einer Landesvermessung höher stellen.

Am Schlusse sei noch bemerkt, dass bei zusammenschliessender oder einheitlicher Landesdarstellung die Blattflächenverkürzungen stets mit den allgemeinen Ordinaten o zu rechnen sind. Wenn daher l_1 die wirkliche oder definirte (konstante) Blattlänge in der sphärischen Ordinatenrichtung bezeichnet, so wird die (quadratische) Blattfläche

$$F = l_1^2 \left(1 + \frac{2h}{R} - \frac{(o_0 + \Delta o)^2}{2R^2} \right) \quad (32a)^1$$

wo das letzte Glied dem bekannten v_f entspricht und hinreichend

$$o_0 + \Delta o = o_0 + y = o_0 + \eta = o$$

gesetzt werden kann.

26. Vergleichung der Projektionen. Die Gl. (17)

$$s' = s(1 + v) = s \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi}{6R^2} \cdot (o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2) \right)$$

$$\varphi' - \varphi = v' = \frac{a_2 - a_1}{6R^2} (2o_1 + o_2) + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{6R^2} (o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2)$$

zeigen, dass die Soldner'sche Abszisse zufolge $\sin 90^\circ = 1$ und $o_1 = o_2$ bei der Abbildung in der Ebene eine Vergrösserung $\frac{a \cdot o^2}{2R^2}$ erfährt, während die Ordinate zufolge $\sin 0 = 0$ sich in

¹⁾ Auf der Vorseite ist Z. 3 v. . irrig (32) anstatt „(32a) der folgenden Seite“ stehen geblieben.

unveränderter Grösse $o = o$ abbildet. Denkt man sich weiter auf der Kugel eine Figur mit gegen die Null abnehmenden Seitenlängen ds (Differentialfigur), so konvergiren die o_2 dieser unendlich kleinen Seiten gegen das o_1 des Anfangspunktes, womit die erste der Gl. (17) gibt

$$\frac{ds'}{ds} = 1 + \frac{o^2}{2R^2} \sin^2 \varphi.$$

Hiernach sind die Seitenverhältnisse des Originals und seiner Abbildung von der Richtung φ abhängig, woraus sich ohne Weiteres auch auf eine entsprechende Aenderung in der Winkelübertragung schliessen lässt. Es gibt denn auch die zweite der obigen Gleichungen im Falle unendlich kleiner s zunächst für die Richtungen wegen $a_2 - a_1 = 0$ und $o_1 = o_2$

$$d\varphi = \varphi' - \varphi = \frac{o^2}{2R^2} \sin \varphi \cos \varphi,$$

dann für die entsprechenden Eckwinkel der Figur

$$d\varphi_2 - d\varphi_1 = \frac{o^2}{2R^2} (\sin \varphi_2 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1).$$

Wird die Figur zum Differentialquadrate, so erhält man wegen $\varphi_2 - \varphi_1 = 90^\circ$ für die inneren Winkel

$$dw = - \frac{o^2}{R^2} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Hiernach bildet sich ein Differentialquadrat, dessen Seiten den Achsenrichtungen parallel sind, als Rechteck ab, d. h. die Winkel und die Ordinatenseiten übertragen sich unverändert, wogegen die in der Abszissenrichtung liegenden Seiten ds um $\frac{o^2}{2R^2} ds$ vergrößert erscheinen. Haben jedoch die Seiten des Quadrats die Oktantenrichtung — $45, 135, 225, 315^\circ$ — so gibt die Abbildung einen Rhombus, dessen Seiten sämtlich um $\frac{o^2}{4R^2} ds$ vergrößert sind. Dabei werden die Winkel der beiden in die Abszissenrichtung fallenden Ecken um je $\frac{o^2}{2R^2}$ verkleinert

und entsprechend die der beiden anderen Ecken (Ordinatenrichtung) um je $\frac{o^2}{2R^2}$ vergrößert. Dieser letztere Wert ist zugleich das vorkommende Maximum und beträgt für $o = 100$ km 25".3, für $o = 200$ km 101".2.

Man ersieht hieraus, dass diese Projektionsart die Figurenelemente in zwar systematischer, indess von der Richtung abhängigen Weise in der Ebene abbildet, wo nebenbei zu bemerken, dass die Bezeichnung „kongruent“ in aller Strenge nur für Strecken in der Ordinatenrichtung gelten kann.

Anders in der ebenen Projektion, für welche die erste der Gl. (19) mit

$$s' = s(1 + v) = s \left(1 + \frac{(o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2)}{6R^2} \right)$$

besteht. Diese gibt für eine Differentialfigur mit den Seitenlängen ds bei der Abbildung in der Ebene wegen $o_1 = o_2$ sofort das regelmässige Vergrößerungsverhältniss

$$\frac{ds'}{ds} = 1 + \frac{o^2}{2R^2} \quad (k)$$

wobei entsprechend der zweiten Gleichung der (19)

$$\varphi'' - \varphi = v' = \frac{a_2 - a_1}{6R^2} (2o_1 + o_2)$$

sich die Winkel unverändert abbilden, da für ds die Differenz $a_2 - a_1$ gegen die Null konvergiert. Somit bilden sich die Elemente einer Figur in ihren kleinsten Teilen ähnlich ab, d. h. unter Gleichbleiben der Winkel und konstantem Vergrößerungsverhältniss der Seiten. Dass dies nicht ohne Weiteres auf Seiten von endlicher Länge übertragen werden kann, wenn es auch mit grosser Annäherung gilt, ist nach den obigen Ausdrücken für v unmittelbar klar; doch liegt es ausserhalb des Rahmens dieser Erörterungen, die bezüglich, in ihrer Allgemeinheit schon längst in aller Strenge gegebenen Folgerungen hier näher darzulegen. In prinzipieller Hinsicht sei daher lediglich bemerkt, dass die Bedingung der Konformität

einzig darin besteht, dass sämtliche von Einem Punkte der geodätischen Fläche ausgehenden und in dieser liegenden Differentiallinien ihren Abbildungen auf der Ebene proportional sein müssen, wie dies unter Zugrundelegung einer sphärischen Vermessungsfläche die obige Gl. (k) ausdrückt. Die zweite Bedingung, dass die von den wirklichen, dann die von den abgebildeten Linienelementen eingeschlossenen Winkel einander entsprechend gleich seien, ist offenbar in der Bedingung der Seitenproportion $\frac{ds'}{ds} = 1 + k_0$ schon enthalten und kann daher keine selbständige Forderung bilden.

27. Transformations-Vollzug. Bei einer zusammenhängenden Reihe vorzunehmender Transformationen werden etwaige Zweifel über den numerischen Betrag der δ und δ' sowie deren Vorzeichen kaum vorkommen oder doch sofort ihre Berichtigung erhalten. Leichter können bei einem vereinzelter Transformationen-Vollzuge Irrungen stattfinden. Hierzu sei folgendes bemerkt.

Das Differentialglied δ für die Abszisse steht mit dem δ' für die Ordinate in der Verbindung

$$\delta = - \frac{(o + \Delta o)}{\Delta a} \delta',$$

wo bekanntermassen $\Delta a = a - a_0$ und $\Delta o = o - o_0$ sind. Ferner hat man zur numerischen Vergleichung mit einigen Hauptwerten in den Systemen $o_0 = 80$ und $o_0 = 160$ (letztere eingeklammert unten angesetzt):

$\Delta a:$	20	40	60	80	100 km
$\delta':$	39	157	353	627	980 cm
	(78)	(314)			"

Diese Zahlenreihe dient zum numerischen Vergleiche der δ' . Wenn daher für $\Delta a = + 68$ und $\Delta o = + 38$ km zunächst der Wert $\delta' = + 4,53$ m gefunden wird, so kann nicht die Irrung 0,45 oder 45,30 eintreten. Die Erfahrung zeigt, dass im Einzelfalle diese Vergleichung keineswegs für unnötig ge-

halten werden darf. Weiter hat man mit $o = + 118$ km und den vorstehenden Werten Δa und Δo den Betrag

$$\delta = - \frac{(118 + 38)}{68} \cdot 4,53 = - 10,40,$$

der dem unmittelbar abgeleiteten bis auf 1 cm entspricht.

Diese Prüfung ist für eine zusammenhängende Reihe von Transformationen, die im selben Netzteile sich bewegen, nur einmal und lediglich zur Vermeidung einer groben, prinzipiellen Irrung hinsichtlich der numerischen Beträge (Dezimalfehler) vorzunehmen. Die Einzelprüfungen erfolgen bekanntlich durch die vorgeschriebene Zurücktransformation (S. 42).

Für die Benützung der S. 41 erwähnten Hilfstafel, von der am Schlusse eine Seite abgedruckt ist, gilt Folgendes. Die Verhältnisszahlen der Spalte 2 für die Bestimmung der δ sind mit 10^7 multiplicirt, so dass die aus diesen und den entsprechenden Δa (in ganzen Metern) gebildeten Produkte durch 10^7 zu teilen sind. Es genügt aber stets, das Δa nur in Zehner-Einheiten zu nehmen und daher das Produkt dann durch 10^6 zu teilen, also rechts 6 Stellen abzuschneiden, um die richtige Stelle des Dezimalkomma zu finden. Selbstverständlich wird man sich hierbei der abgekürzten Multiplikation oder der Produktentafeln bedienen. Wenn übrigens bei einer zusammenhängenden Transformationsarbeit das Dezimalkomma nur einmal richtig angesetzt ist, sind weitere Irrungen ausgeschlossen.

Ein Aehnliches gilt im gleichen Falle für die Vorzeichen der δ . Vor Allem ist hier darauf zu sehen, dass die Beträge stets algebraisch zu addiren, und ebenso, dass die Konstanten $\log q$ und $\log k$ (Seite 41) westlich der Hauptachse positiv und östlich negativ sind. Dies gibt

I. Für Umwandlung allgemeiner in lokale Koordinaten:

δ ist stets mit entgegengesetztem Vorzeichen von Δa algebraisch zu addiren, so lange $o > \frac{o_0}{2}$;

δ' ist stets mit $+$ westlich, mit $-$ östlich der Haupt-Abszissenachse im ursprünglichen Systeme algebraisch zu addiren.

II. Für die Prüfungsrechnung (lokale in allgemeine Koordinaten):

δ_1 ist stets mit gleichem Vorzeichen von x algebraisch zu addiren, so lange $o > \frac{o_0}{2}$;

δ'_1 ist stets mit — westlich, mit + östlich der Haupt-Abszissenachse algebraisch zu addiren.

Diese Vorzeichen werden am besten sofort in die Uebersichtskarte eingetragen. Der vorige Ausnahmefall bei δ und δ_1 (wenn nämlich $o < \frac{o_0}{2}$ würde) kann natürlich nur ausnahmsweise bei Punkten eintreten, die über die innere Systemgrenze hinausfallen.

Für die Koordinaten der ebenen Projektion tritt entsprechend den Gl. (22) und (22a) — S. 21 und 51 — noch das ergänzende Glied $\frac{(\Delta o)^3}{6 R^2}$ hinzu. Es besteht hier zunächst die Vergleichsreihe

$\Delta o :$	20	40	60	80	100 km
$\frac{(\Delta o)^3}{6 R^2} :$	3	26	88	209	408 cm.

Hinsichtlich der algebraischen Addition des Gliedes gilt einfach: Ursprüngliche Transformation Gl. (22) gleiches Vorzeichen mit Δo , Probe oder Zurücktransformation Gl. (22a) entgegengesetztes Vorzeichen mit Δo , bzw. mit η .

28. Landesaufnahme in Bayern. Die bayerische Landesvermessung (1805—1867) ist eine 5000-t. Messtischaufnahme, Städte und Ortschaften 1 : 2500. Sie ist gegründet auf ein trigonometrisches Netz (1 Punkt auf 5 qkm), in welchem die Ordinaten bis ± 180 km ansteigen. Diesem durchaus sphärisch, also mit (δa) , (δo) und $(\delta \varphi)$ gerechneten Netze schlossen sich graphisch bestimmte Dreiecks- oder Tertiärpunkte (12 auf 5 qkm) an, welche der Einzelaufnahme mit Messtisch und distanzmessender Kippregel zur unmittelbaren Stütze dienten. Die

Seiten der Messblätter ($l = 467$ mm) sind Abschnitte von Ordinatenkreisen, bzw. solche von sphärischen Parallelen zur meridionalen Abszissenachse. (Nebenbei sei bemerkt, dass die Orientirung des Netzes nach neueren Messungen um $14''.5$ irrig ist, was bei dem Zusammenhange zwischen Achsen und Blattseiten-Richtungen etwaigen Aenderungen weitere Hindernisse bereitet). Der Durchführung lag später eine Instruktion vom Jahre 1830 zu Grunde, die in ihrer Art und an damaligen Verhältnissen gemessen, vorzüglich war und insbesondere die wesentlichen theoretischen Bedingungen mit den praktischen Forderungen glücklich verband.

Im Zusammenhalte mit Früherem geht hervor, dass bei gleichbleibender Grundlinie l die Höhen der Messblätter

$$h = l \left(1 - \frac{o^2}{2R^2} \right)$$

betragen, und dass die mit den Blattseiten-Abszissen gebildeten Abszissenreste ($a - a_n$) der Dreieckspunkte mit

$$a_r = (a - a_n) \left(1 - \frac{o^2}{2R^2} \right)$$

bei der ebenen Abbildung in den Blättern einzutragen sind, wo o die Mittelordinate des Blattes bezeichnet. Dies wird von $o = 90$ km an auch geometrisch merkbar.

Mit der Beachtung dieser beiden Gleichungen (2 bis 3 für ein Blatt) waren die Eck- und Koordinatenpunkte auf die Ebene zurückgeführt, in welcher sich sodann die graphische Festlegung der Tertiärpunkte und die Einzelaufnahme unmittelbar vollzog. Man ersieht hieraus die Zweckmässigkeit der Grosskoordinaten in der graphischen Aufnahme, indem die Zurückführung auf die Ebene sich auf die wenigen Dreieckspunkte beschränkte, alle der Sekundärtriangulirung folgenden Messungsarbeiten aber ohne Weiteres in der Ebene vor sich gingen.

Mit dem Abschlusse der Landesaufnahme ist auch sofort das Bedürfniss von Erneuerungsmessungen mit zugleich grösserem

Aufnahmsmassstabe (2500 und 1000) herangetreten. Dieselben sind von grossem Umfange, werden in verschiedenen Landesteilen vorgenommen und erfolgen seit 1874 nach der Zahlenmethode. Hierbei werden die älteren (wenigen) Dreieckspunkte, soweit sie noch vorhanden und benützbar sind, den ergänzenden Neutriangulationen zugrunde gelegt. Da keine gänzliche Neuaufnahme des Landes vorliegt, ist mit Rücksicht auf das Bestehenbleibende die Blatteinteilung und (mit Ausnahme der Stadtaufnahmen) auch die frühere Blattabmessung beibehalten worden, was anetrachts der neuen Masseinheit zu den schon berührten technischen Erschwerungen führt.

Mehr als Alles dies, stehen jedoch die in dem Uebergange unverändert beibehaltenen (sphärischen) Grosskoordinaten mit der neuen Messungsmethode in Widerspruch. Dieser ist ein prinzipieller, weil in der graphischen Aufnahme bei Voraussetzung (sphärischer) Grosskoordinaten deren Abbildung in der Ebene sich vor der Messung vollzieht, letztere also unmittelbar in jener erfolgt, während bei der Zahlenmethode auf der Kugel gerechnet und gemessen, die ebene Abbildung aber erst nachher (bei der Kartirung) vollzogen wird.

Der Unterschied ist gross. Nach den früheren Darlegungen sind für die einzelnen Punktordnungen die sphärischen Beziehungen von $\rho = 20, 40, 90$ km an zu berücksichtigen, diese jedoch bei der ebenen Abbildung nach den beiden obigen Gleichungen für sämtliche Punkte von $\rho = 90$ km an geometrisch wieder in Abzug zu bringen. Nach den Aufstellungen S. 28 kann man für 5 qkm auf etwa 300 Koordinatenpunkte rechnen, was in dieser Hinsicht mit der Einfachheit der graphischen Aufnahme (300:1) gar nicht vergleichbar ist. Kurz zusammengefasst lässt sich die Verwendung (sphärischer) Grosskoordinaten in der Zahlen-Aufnahmsmethode einfach dahin ausdrücken: Bei der direkten Rechnung auf der Kugel sind von bestimmten Grenzen an den Koordinaten der untergeordnetsten Punkte erst sphärische Zuschläge zu erteilen, die sodann bei der ebenen Abbildung (Kartirung) geometrisch wieder

eliminirt werden müssen. Das bedeutet nicht blos Erschwerung, sondern auch Minderung in der technischen Zuverlässigkeit.

Man könnte manchen Orts diese Hemmungen auf leichtere Schultern nehmen, als in der Schrift geschehen ist — der prinzipielle Unterschied sollte und dürfte jedoch nicht verkannt werden, welcher in beiden Messungsmethoden zwischen Gross- und Klein-Koordinaten besteht. Erstere sind in der graphischen Landesaufnahme zweckmässig oder zulässig, während für die Zahlenmethode das Gegenteil gilt.

Wenn hinsichtlich der grossenteils umständlichen Zurückführung auf die Ebene einzelne Beurteilungen zu dem Schlusse gelangen sollten, dass in der heutigen Einzelaufnahme das Planbild Nebensache, der Handriss oder die Zahl Alles sei, und infolge dessen trotz der gehäuften Koordinatenpunkte die obigen Ausdrücke $\frac{l o^2}{2 R^2}$ und $(a - a_n) \frac{o^2}{2 R^2}$ wenig Beachtung verdienen, so wäre das nur zutreffend, wenn die sämtlichen Katasterflächen ausnahmslos aus Messungszahlen ermittelt würden. So lange jedoch — wie zumeist — die Katastervermessungen in der allgemeinen Landesaufnahme zur Erleichterung von Aufnahme und Kartirung jene Flächen ganz oder überwiegend im Plane, d. h. graphisch ermitteln, so lange wird neben dem Handrisse auch das Planbild seine grosse Bedeutung behalten und nicht als Nebensache behandelt werden dürfen. Dies gilt zunächst für die Neuaufnahme, teilweise aber auch für den technischen Katasterfortführungsdienst; für beide sind daher ebene Koordinaten allein zweckmässig, weil nur ihnen die nötige Einfachheit zukommt. Fehlt diese letztere, so kann die Praxis auf den abschüssigen Weg geraten, vorgeschriebene und wichtige, dabei aber lästige Bedingungen technisch leicht zu nehmen.

Der in der Schrift eingeschlagene Weg, um in einem abgeschlossenen Grosskoordinaten-System zu Kleinkoordinaten zu gelangen, dürfte in Anbetracht der beizubehaltenden Hauptgrundlagen der Vermessung und sonstigen technischen Anfor-

derungen der einzig gangbare und einfachste sein. Die gänzliche Neuanlage einer Landesvermessung kann ja allerdings mit ganz anderen und klareren Verhältnissen rechnen. Sie wird bei grosser Ausdehnung des Landes die Netzpunkte I. und II. Ordnung geographisch koordiniren, innerhalb des Landes aber Einzelsysteme mit meridionalen Achsen und rechtwinkligen Koordinaten zu max. $\phi = \pm 40 - 50$, bzw. max. $\eta = \pm 80 - 100$ km anlegen, auf Grund deren alle weiteren Triangulationen und Vermessungen in der Ebene vollziehbar sind. Wenn für die in solche Kleinsysteme fallenden Punkte I. und II. Ordnung ihre auf die lokalen Meridianachsen bezogenen rechtwinkligen Linearkoordinaten berechnet werden, so hat man in dieser Weise ein Vermessungssystem, das in seinen Hauptgrundlagen den wissenschaftlichen, in seiner weiteren Ausgestaltung aber allen Anforderungen des technischen Vermessungsvollzuges entspricht. Es kann hier nicht der Ort sein, dies mathematisch weiter auszuführen; auch hat ja die Aufgabe, geodätische Koordinaten aus geographischen Positionen zu rechnen, längst ihre Lösung gefunden. Eine besondere Aufmerksamkeit ist indess dabei den geometrischen Anschlussverhältnissen an den zusammenstossenden Grenzlinien der Einzelsysteme zu widmen.

Für Bayern würde eine solche Netzanlage — von der räumlich getrennten, daher für sich zu behandelnden Rheinpfalz abgesehen — zu fünf Einzelsystemen rechtwinklig-sphärischer oder zu zwei Systemen konformer Koordinaten führen und damit jedem wissenschaftlichen und technischen Bedürfnisse entsprochen sein. Das ist aber wohl erst bei der gänzlichen Neuanlage der Landesaufnahme zu erreichen. Für blos teilweise und dabei nur ganz allmählig fortschreitende Erneuerungsmessungen erscheint die Uebergangszeit zu lang ausgedehnt, um heute jene Erneuerungen auf gänzlich neue Grundlage zu stellen, insbesondere auch dabei das einheitliche Blattsystem zu ändern. Hiermit will keineswegs die Unmöglichkeit ausgesprochen, sondern nur auf die Schwierigkeiten hingewiesen sein, welche, was von aussen oft verkannt wird,

im bayerischen Netze noch grösser als anderwärts sind. Diese letztere liegt einfach in der bestehenden Einheit von Koordinaten- und Blattsystem, demzufolge die Ecken und Seiten der Landesvermessungsblätter Koordinatenfunktionen ($LN = a$, bzw. $Ln = 0$) sind. Jede Aenderung in der Masseinheit, der Blattabmessung, in der Lage des Koordinaten-Nullpunktes, in der Netzorientirung oder den Achsenrichtungen wirkt infolgedessen auf die Ecken und Seiten aller Landesvermessungsblätter zurück, macht zum mindesten die bisher in diesen bestehenden einfachen und rationalen Beziehungen verwickelt und unzweckmässig. Man wird zugeben, dass Aenderungen in den Koordinirungs-Grundlagen dort leichter durchzuführen sind, wo die Aufnahmen gemarkungsweise mit natürlichem Grenzabschlusse der Blätter erfolgen. Auch ist nicht ausser Acht zu lassen, dass die bayerischen Landesvermessungsblätter (lithographirt) veröffentlicht werden und daher Aenderungen sowie lange Uebergangszeiten nicht bloss die technischen Behörden, sondern auch die Oeffentlichkeit treffen.

Wenn die Realisirung des Ideals, nämlich die Durchführung einer neuen einheitlichen Landesaufnahme zu technischen und staatswirtschaftlichen Zwecken aus naheliegenden Gründen ausser allem Betracht bleiben muss, und bloss getrennte, wenn auch umfangreiche Erneuerungsmessungen in Frage kommen, so gelangt man mit Berücksichtigung der in der Schrift geführten technischen Nachweise zu folgendem Schlusse: Die gänzliche Neuanlage der Landeskoordinirung mit neuen Meridionalachsen sowie neuer rationaler Blatteinteilung bringt erhebliche Rechenarbeit in der Durchführung und führt wegen des nur allmählig, stückweis und getrennt Fortschreitenden zu allgemeinen und technischen Missständen. Bei gleicher Neuanlage, indess Beibehaltung der bisherigen Blätter, bleibt die rechnerische Umständlichkeit der Durchführung bestehen, während statt der vorigen andere technische Erschwerungen (in der Kartirung) eintreten, ohne dass man doch dabei zu einem neuen rationellen Blatt- und Koordinatensystem gleich dem bisherigen gelangte. Der in der Schrift eingeschlagene Weg

ist ein vermittelnder; er behält zwar notgedrungen die bisherigen Blattgrenzen bei, macht aber wegen der geringen Konvergenz der alten und neuen Achsen sämtliche Abweichungen und Ueberführungsarbeiten zum möglichsten Minimum, während er doch allen technischen Anforderungen der Zahlenmethode (lokale anstatt sphärische Grosskoordinaten in Rechnung und Abbildung) entgegenkommt.

Die einheitliche Anlage der bayerischen Landesvermessung ist eben ein „konservatives System“, das als solches der Verückung lediglich einzelner Teile widerstrebt. Und für die heutigen Erneuerungsarbeiten wären kleinere Verbesserungen auch nur im Vollzuge, nicht in den Grundlagen nötig gewesen, wenn noch der Messtisch zur Anwendung gelangte; indem man aber zur Zahlen- oder Koordinatenmethode überging, waren damit neue und abweichende Forderungen gegeben, die nicht etwa fiktiv-theoretischer, sondern real-technischer Natur sind.

Am Schlusse dieser Betrachtungen sei eine wichtige hierher gehörige Frage noch kurz gestreift. Es besteht vereinzelt die Anschauung, dass die Konformität selbst für den technischen Vollzug der Landesaufnahme keine lokalen Systeme in der hier befürworteten Einschränkung nötig habe, sie vielmehr ohne sonderliche Erschwerung auch für grössere Ausdehnungen als $\eta < 100$ km in der ebenen Projektion weiter rechnen und kartiren dürfe. Das wäre nun z. B. für die bayerische Landesaufnahme mit ihren $\rho < 200$ km sehr bestechend und ist auch theoretisch interessant und denkbar. Aber diese konform allerdings gegebene Möglichkeit, die zunehmende Netzverzerrung entweder durch Reduktionen oder Anwendung besonderer Massstäbe in jedem Einzelplane berücksichtigen zu können, erscheint zu einer allgemeinen und praktischen Durchführung in der Landesvermessung niemals geeignet. Hier wird im Sinne der Praxis als Kriterium der zulässigen Koordinatenausdehnung bei der Planherstellung stets zu gelten haben, dass die Abweichungen der geodätischen Dimensionen von ihrer ebenen Projektion unter der geometrischen Merkbareitsgrenze von 0,05 mm für $l = 0,5$ m bleiben, was für Kongruenz und Konformität gleich-

mässig bei $o = y = \eta < 90$ km eintritt. Diese Grenze wird daher bezüglich der Planherstellung stets festzuhalten sein.

In prinzipieller Hinsicht ist also unter Beachtung des früher Abgeleiteten folgendes festzustellen. In der Kongruenz erhält man betreffs der praktischen Unschädlichkeit der Verzerrungsgrössen v und v' für jede Arbeitsgruppe verschiedene Grenzwerte der o , bzw. y . Triangulirung III. Ordnung ($1''$) 20 km, IV. Ordnung ($3''$) 40, Polygonisirung ($6''$) und $\left(\frac{1}{10000}\right)$ 60, bzw. 90, und Kartirung $\left(\frac{1}{10000}\right)$ bis 90 km. Die Verschiedenheit dieser Grenzwerte muss als praktischer Nachteil bezeichnet werden. Hiergegen hat die konforme Projektion den grossen Vorzug, nur einen Grenzwert $\eta = 90$ km zu besitzen, der mit 1.2 für Triangulirung III. Ordnung gleichzeitig allen übrigen Bedingungen bis herab zur Kartirung genügt. Man wird dies bei Anlage künftiger Landesvermessungen, von Allem übrigen abgesehen, entsprechend zu würdigen haben, und dabei auch nicht verkennen, wie schon von Anderen genügend hervorgehoben, dass für die heutige Vermessungsmethode der Schwerpunkt in der Triangulirung, überhaupt in den Richtungsmessungen, liegt, welche den festen Grundbau der modernen Aufnahme bilden. Und gerade die Triangulirung ist in der Konformität wegen des geringen Betrages und engerer Schwankungsgrenze des v' mit grosser Schärfe zu machen. Will oder muss man jedoch aus anderen Gründen in einer bereits bestehenden einheitlichen Landeskoordinirung bei der kongruenten Projektion verbleiben, so ist sicher, dass auch in dieser für die heutige Zahlenmethode räumlich eingeschränkte oder Kleinkoordinaten für Rechnung und für Kartirung eine unerlässliche Forderung sind.

Auszug von der Transformations-Tabelle.

Lokalsysteme II, III, V, VI und IX.

$$O_0 = \pm 80\,000\text{ m}$$

$\left(o - \frac{o_0}{2}\right)$	$(10^7 q) \cdot \left(o - \frac{o_0}{2}\right)$	$k(\Delta a)^2$	$\left(o - \frac{o_0}{2}\right)$	$(10^7 q) \cdot \left(o - \frac{o_0}{2}\right)$	$k(\Delta a)^2$	$\left(o - \frac{o_0}{2}\right)$	$(10^7 q) \cdot \left(o - \frac{o_0}{2}\right)$	$k(\Delta a)^2$
m		cm	m		cm	m		cm
36000	706	127	42000	823	173	48000	941	226
2	710	128	2	827	175	2	945	228
4	714	130	4	831	176	4	949	230
6	717	131	6	835	178	6	953	231
8	721	133	8	839	180	8	957	233
37000	725	134	43000	843	181	49000	961	235
2	729	136	2	847	183	2	964	237
4	733	137	4	851	185	4	968	239
6	737	139	6	855	186	6	972	241
8	741	140	8	859	188	8	976	243
38000	745	142	44000	863	189	50000	980	245
2	749	143	2	866	191	2	984	247
4	753	145	4	870	193	4	988	249
6	757	146	6	874	195	6	992	251
8	761	148	8	878	197	8	996	253
39000	765	149	45000	882	198	51000	1000	255
2	768	151	2	886	200	2	1004	257
4	772	152	4	890	202	4	1008	259
6	776	154	6	894	204	6	1012	261
8	780	155	8	898	206	8	1015	263
40000	784	157	46000	902	207	52000	1019	265
2	788	158	2	906	209	2	1023	267
4	792	160	4	910	211	4	1027	269
6	796	162	6	914	213	6	1031	271
8	800	163	8	917	215	8	1035	273
41000	804	165	47000	921	216	53000	1039	275
2	808	166	2	925	218	2	1043	277
4	812	168	4	929	220	4	1047	279
6	816	170	6	933	222	6	1051	282
8	819	171	8	937	224	8	1055	284
42000	823	173	48000	941	226	54000	1059	286
x	$10^7 q x$	$k x^2$	x	$10^7 q x$	$k x^2$	x	$10^7 q x$	$k x^2$

$\left(o-\frac{o_0}{2}\right)$	$(10^7 q) \cdot \left(o-\frac{o_0}{2}\right)$	$k(\Delta a)^2$	$\left(o-\frac{o_0}{2}\right)$	$(10^7 q) \cdot \left(o-\frac{o_0}{2}\right)$	$k(\Delta a)^2$	$\left(o-\frac{o_0}{2}\right)$	$(10^7 q) \cdot \left(o-\frac{o_0}{2}\right)$	$k(\Delta a)^2$
m		cm	m		cm	m		cm
54000	1059	286	58000	1137	330	62000	1215	377
2	1063	288	2	1141	332	2	1219	379
4	1066	290	4	1145	334	4	1223	382
6	1070	292	6	1149	337	6	1227	384
8	1074	294	8	1153	339	8	1231	386
55000	1078	296	59000	1157	341	63000	1235	389
2	1082	299	2	1161	343	2	1239	391
4	1086	301	4	1164	346	4	1243	394
6	1090	303	6	1168	348	6	1247	396
8	1094	305	8	1172	350	8	1251	399
56000	1098	307	60000	1176	353	64000	1255	401
2	1102	310	2	1180	355	2	1259	404
4	1106	312	4	1184	358	4	1262	406
6	1110	314	6	1188	360	6	1266	409
8	1113	316	8	1192	362	8	1270	412
57000	1117	318	61000	1196	365	65000	1274	414
2	1121	321	2	1200	367	2	1278	417
4	1125	323	4	1204	369	4	1282	419
6	1129	325	6	1208	372	6	1286	422
8	1133	327	8	1211	374	8	1290	424
58000	1137	330	62000	1215	377	66000	1294	427
x	$10^7 q x$	$k x^2$	x	$10^7 q x$	$k x^2$	x	$10^7 q x$	$k x^2$

Logarithmische Konstanten im bayerischen Dreiecknetze.

$$R = 6,805\,3766$$

$$R^2 = 13,610\,7532$$

$$\frac{1}{R} = 3,194\,6234 - 10$$

$$\frac{1}{R^2} = 6,389\,2468 - 20$$

$$\frac{1}{2R^2} = 6,08\,822 - 20$$

$$\frac{1}{6R^2} = 5,61\,110 - 20$$

$$q_{+80} = 1,29\,234 - 10$$

$$k_{+80} = 0,99\,131 - 10$$

$$q_{-80} = 1,29\,234_n - 10$$

$$k_{-80} = 0,99\,131_n - 10$$

$$q_{+160} = 1,59\,337 - 10$$

$$k_{+160} = 1,29\,234 - 10$$

$$q_{-160} = 1,59\,337_n - 10$$

$$k_{-160} = 1,29\,234_n - 10.$$

$$\frac{1}{R^2 \sin 1''} = 1,70\,367 - 10.$$

$$c = 0,465\,1733_3 \text{ (b. Ruthen in Meter).}$$

$$c' = 9,534\,8266_7 \text{ (Meter in b. Ruthen).}$$

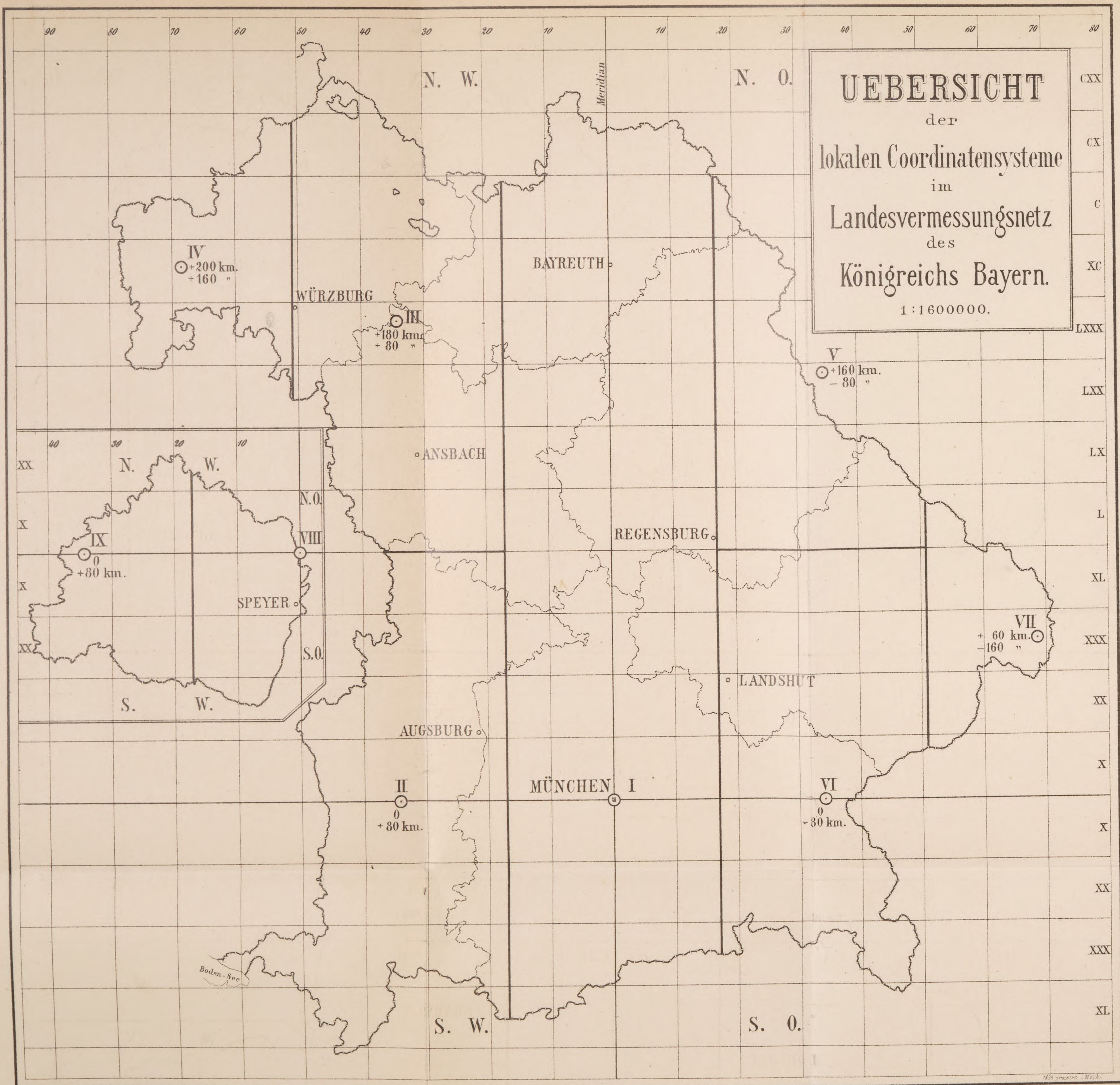
$$v_f = [2,22\,268] (o_0 + \Delta o)^2 \text{ (qm)}$$

$$\text{für } l = 466,9745 \text{ mm und } M = 2500.$$

$$v_f = [1,48\,616] (o_0 + \Delta o)^2 \text{ (qm)}$$

$$\text{für } l = 500 \text{ mm und } M = 1000.$$

$$(o_0 + \Delta o = o_0 + y = o_0 + \eta = o).$$



Im gleichen Verlage erschienen:

Franke, J. H., Technische Anleitung zu den trigonometrischen Netz- und Koordinaten-Rechnungen in der Kataster- und Forst-Vermessung. Ein Handbuch für Trigonometer und Vermessungsingenieure, bearbeitet auf Grund der Hauptvorschriften der k. bayer. Vermessungsinstruktion mit vergleichender Erörterung weiterer technischer Anweisungen. Mit 4 Tafeln. VIII, 170 u. LXIV S. Lex. 8°. 1889. M. 7.

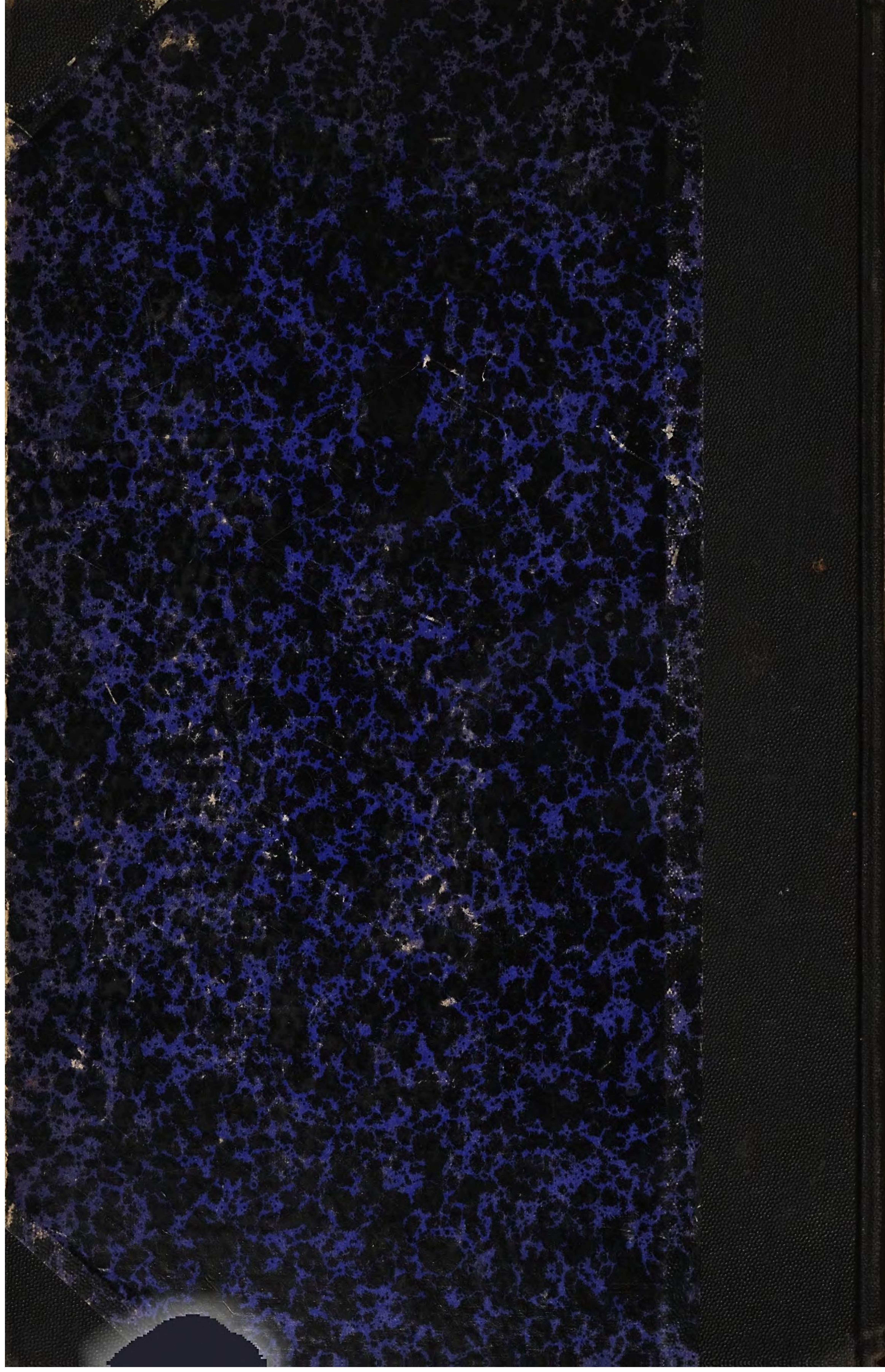
Aretin, Theodor Freiherr von, Handbuch zum Abstecken von Curven sowie zur Bestimmung der Winkel (ohne Mess-Instrumente), auf das Sorgfältigste bearbeitet und mit Genehmigung der k. bayer. Generaldirektion der Staatsbahnen herausgegeben. Mit 2 Figurentafeln. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. 86 S. 32° u. 10 S. Notizblätter. 1893. M. 1.50.

Decher, Otto, Die Prismentrommel. Zweite Auflage. Mit 1 Titelkupfer, 27 Figuren im Text und 1 Tafel zum Abstecken von Kreisbogen. [3 S.] IV u. 52 S. Lex. 8°. 1888. M. 2.

Die erste Auflage erschien 1880 unter dem Titel: „Das Prismenkreuz“ und kostete 80 Pfg.

— **Neues Nivellirinstrument,** ausgeführt im mathematisch-mechanischen Institute von Ertel & Sohn (früher G. Reichenbach) in München zum Messen von Neigungen, Distanzen und Höhen. 52 S. Lex. 8°. 1890. M. 1.80.

Stoeber, E., Die römischen Grundsteuervermessungen. Nach dem lateinischen Texte des gromatischen Codex, insbesondere des Hyginus, Frontinus und Nipsus bearbeitet. Mit einem Vorwort von C. M. v. Bauernfeind. Mit 29 Holzschnitten im Text. [IV u.] 149 S. gr. 8°. 1877. M. 4.



Franke, Julius H.

Geodätische Punktkoordinierung in sphärischen Kleinsystemen vergleichende
Entwicklungen im einheitlichen Koordinatensystem der bayerischen
Landesvermessung

München 1898

Math.p. 153 pqd

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11867835-0